

КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ ТА КОМПОНЕНТИ

УДК 681.3:621.375

О.Д. АЗАРОВ, О.В.КАДУК, О.В.ДУДНИК, А.В.РОСОЩУК

Вінницький національний технічний університет, Вінниця

МЕТОДИ ЦИФРОВОГО КАЛІБРУВАННЯ ВІДМОВСТІЙКИХ ЦАП ІЗ ВАГОВОЮ НАДЛИШКОВІСТЮ

Анотація: Проаналізовано стратегії цифрового самокалібрування характеристики перетворення ЦАП із ваговою надлишковістю. Визначено критерій ефективності та оцінено ефективність різних стратегій самокалібрування ЦАП із ваговою надлишковістю. Надано рекомендації щодо побудови ЦАП із ваговою надлишковістю, що самокалібруються, побудованих на неточних елементах. Аннотация: Проанализированы стратегии цифровой самокалибровки характеристики преобразования ЦАП с весовой избыточностью. Определен критерий эффективности и оценена эффективность различных стратегий самокалибровки ЦАП с весовой избыточностью. Даны рекомендации по построению ЦАП с весовой избыточностью, которые самокалибруются, построенных на неточных элементах.

Abstract: The strategies of digital conversion selfcalibration characteristic DAC with weight redundancy are analyzed. The criterion of efficiency are defined and efficiency of various strategies selfcalibration DAC with weight redundancy are evaluated. The recommendations on the construction of the selfcalibration DAC with weight redundancy, which are based on inaccurate elements, are given.

Ключові слова: самокалібрування, цифро-аналогове перетворення, характеристика перетворення, вагова надлишковість.

Вступ

Використання методів цифрового самокалібрування дозволяє створювати високоточні ЦАП із ваговою надлишковістю (ВН), побудовані на неточних елементах. На теперішній час розроблено досить значне число стратегій цифрового самокалібрування ЦАП [1, 2, 3]. Водночас, вибір того чи іншого підходу при побудові перетворювача форми інформації (ПФІ) слід здійснювати з огляду на обчислювальну складність процедур самокалібрування, а також мінімізацію похибки, що коригується.

Актуальність

ЦАП паралельної структури [4] є складовою частиною АЦП і в значній мірі визначає похибку останнього. Застосування технологічних прийомів для забезпечення точності ЦАП в широкому діапазоні температур дозволяє створювати 12-розрядні ПФІ з фіксованим рівнем похибки на етапі виготовлення [5, 6].

Разом з тим, поява параметричних відмов аналогових вузлів ПФІ у процесі експлуатації через вплив чинників навколишнього середовища і старіння елементів призводить до невідповідності декларованої роздільної здатності реальному значенню похибки перетворення [7]. При цьому властивість багаторозрядних ЦАП, що самокалібруються, з ВН підтримувати похибку перетворення у заданих межах, незважаючи на змінення параметрів аналогових вузлів під дією чинників, що впливають, будемо називати параметричною відмовистістю ПФІ [7].

У науково-технічній літературі окремі стратегії цифрового самокалібрування ЦАП із ВН розглянуто переважно епізодично [2]. Проте систематизованого аналізу можливостей існуючої множини стратегій, який би дав можливість відібрати найефективнішу, наприклад, за критерієм мінімальної похибки, не проводилося. Тому тема статті є актуальною.

Мета

Метою досліджень є аналіз стратегій цифрового калібрування характеристики перетворення ЦАП із ВН, що дозволяють зменшити підсумкову похибку перетворення порівняно з первинним похибками елементної бази.

Постановка задач

1. Проаналізувати запропоновані стратегії цифрового самокалібрування характеристики перетворення ЦАП із ВН.
2. Оцінити ефективність вказаних стратегій за умови, що критерієм є зменшення підсумкової похибки перетворення після застосування процедури самокалібрування.
3. Надати рекомендації щодо структурної організації ЦАП із ВН, що самокалібруються.

Розв'язання задач

Внаслідок змінення умов навколишнього середовища, зокрема, температури, вологості, тиску та інших чинників, а також у процесі старіння параметри і характеристики аналогових вузлів ПФІ змінюються. Вказана особливість призводить до відхилення ваг розрядів ЦАП від їх номінальних значень та, як наслідок, порушення лінійності характеристики перетворення (ХП) ЦАП, що, зокрема, проявляється у появі на ній стрибкоподібності, зокрема, немонотонності.

Особливістю ЦАП із ВН, побудованого на неточних елементах, є нерозривність характеристики перетворення (рис. 1) та наявність зон перекриття [1], що дозволяє підвищувати точність ЦАП та підтримувати заданий рівень похибок перетворення за рахунок використання процедури калібрування

ваг розрядів виключно в цифровій формі без втрати швидкодії ПФІ. На рис. 1 K_{BX} – цифровий еквівалент вхідного коду, $A_{ВИХ}$ – вихідний аналоговий сигнал.

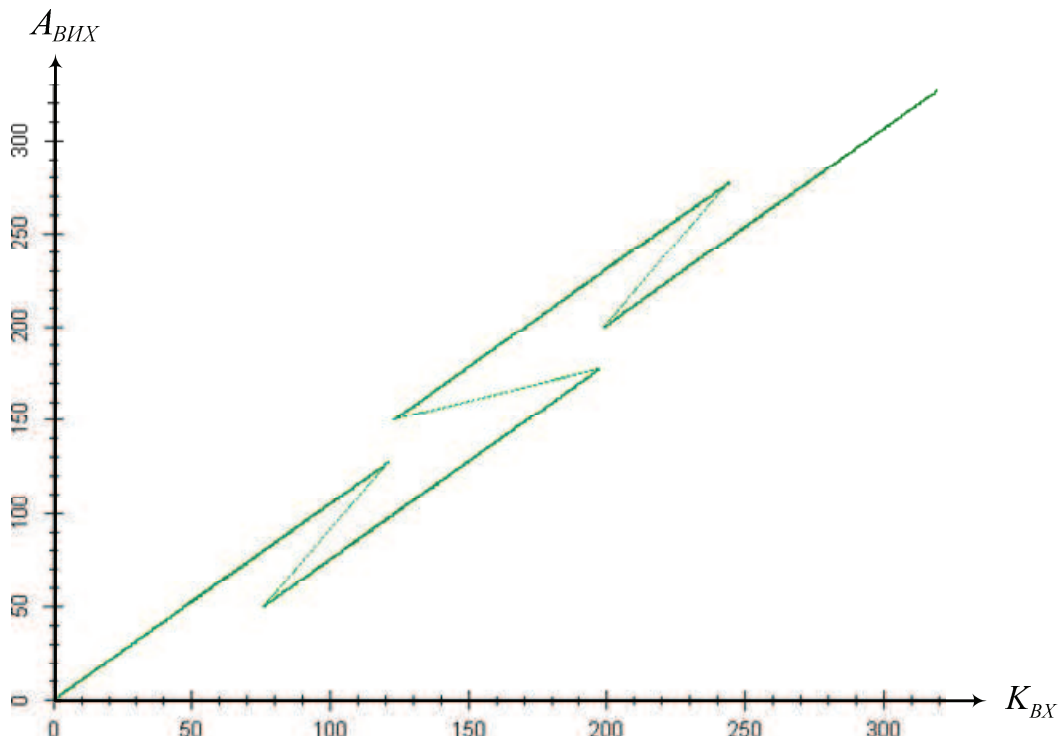


Рисунок 1 - Нерозривна характеристика перетворення ЦАП із ВН, побудованого на неточних елементах

Самокалібрування є різновидом коригування [5] і полягає у визначенні відхилень ваг старших «неточних» розрядів шляхом порівняння ваги поточного розряду, що калібрується, з сумою ваг певної групи сусідніх молодших розрядів на базі існуючих між ними математичних співвідношень з подальшим обчисленням коригувальних поправок або коригованих значень «неточних» розрядів [1].

В основу запропонованих стратегій самокалібрування покладено принцип умовного розбиття розрядної сітки перетворювача на групу «неточних» старших розрядів і «точних» молодших (рис. 2). При цьому практично всі ваги розрядів Q є неточними і можуть мати досить значний $1 \div 10\%$ технологічний допуск δQ . У загальному випадку ця характеристика є ймовірнісною і, як правило, підпорядковується нормальному закону розподілу (рис. 3) [8], де $f(x)$ – щільність імовірності значень δQ . При цьому δQ можна визначити таким чином:

$$\delta Q = \frac{\Delta Q_i}{Q_i},$$

де ΔQ_i – абсолютне відхилення реальної ваги i -го розряду від свого номінального значення; Q_i – значення реальної ваги i -го розряду пристрою.

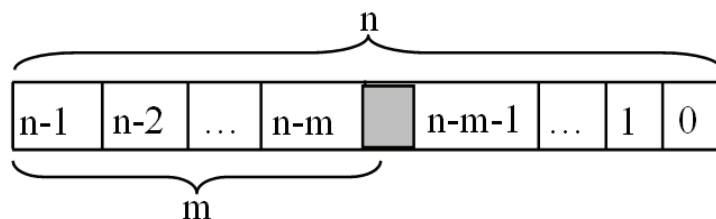


Рисунок 2 - Модель розрядної сітки ЦАП у режимі цифрового самокалібрування

$$A_{КАЛ\ n-m} = Q_{n-m},$$

де Q_{n-m} – реальна вага $(n-m)$ -го розряду ЦАП.

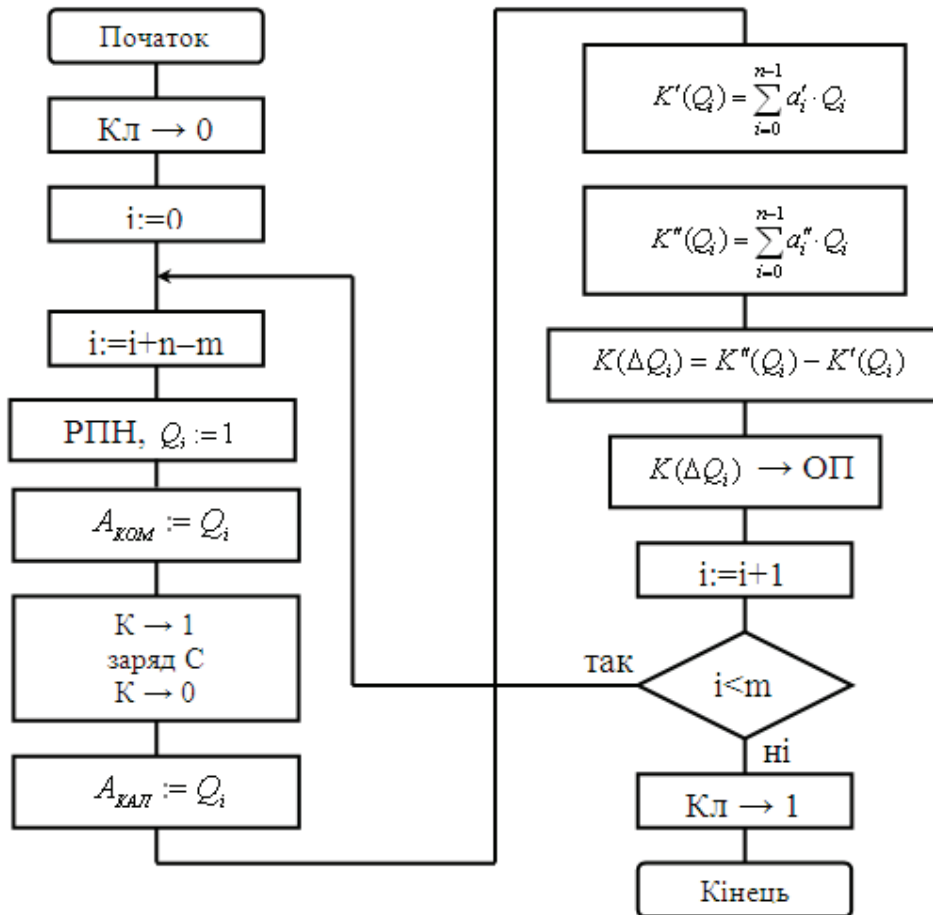


Рисунок 5 - Блок-схема алгоритму одноциклового самокалібрування ЦАП із ВН в режимі із завданням індивідуального рівня калібрувального сигналу

Після встановлення на одному вході СП аналогового сигналу $A_{КАЛ}$ починається його подвійне врівноваження за алгоритмом послідовного наближення за допомогою РНП і α -ЦАП із вмиканням та без вмикання розряду, що калібрується.

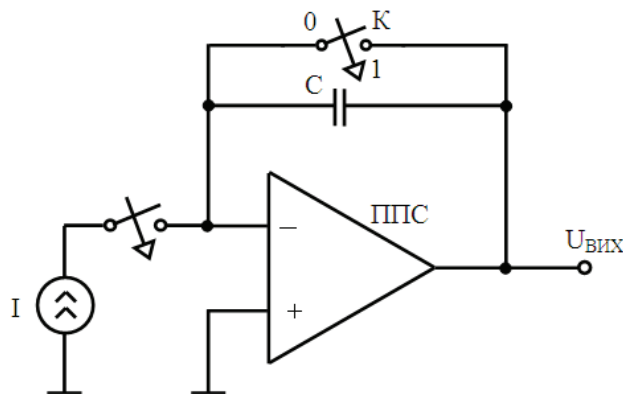


Рисунок 6 - Схема ГКС

При цьому, результат першого кодування $A_{КАЛ}$ – код N' . Відповідний цифровий еквівалент $K'(Q_{n-m})$ зберігається у блоці пам'яті ЦОП:

$$K'(Q_{n-m}) = \sum_{i=0}^{n-1} a'_i \cdot Q_i,$$

де a'_i – розрядні коефіцієнти, що відповідають коду N' .

Цифровий еквівалент коду другого врівноваження $K''(Q_{n-m})$ зберігається в блоці пам'яті ЦОП:

$$K''(Q_{n-m}) = \sum_{i=0}^{n-1} a''_i \cdot Q_i.$$

Після формування $K'(Q_{n-m})$ та $K''(Q_{n-m})$ ЦОП знаходить код $K(\Delta Q_{n-m})$ відхилення $(n-m)$ -го розряду:

$$K(\Delta Q_{n-m}) = \sum_{i=0}^{n-1} a''_i \cdot Q_i - \sum_{i=0}^{n-1} a'_i \cdot Q_i,$$

що фіксується в блоці пам'яті ЦОП. На цьому калібрування $(n-m)$ -го розряду закінчується.

Наступним калібрується $(n-m+1)$ -й розряд. За допомогою ГКС формується $A_{КАЛ} = Q_{n-m+1}$. Далі проводиться подвійне врівноваження цього аналогового сигналу, причому під час другого врівноваження БК примусово забороняється вмикання $(n-m+1)$ -го розряду. У результаті вказаних врівноважень в ЦОП формується два цифрових еквіваленти $K'(Q_{n-m})$ і $K''(Q_{n-m})$, на основі яких знаходиться відхилення $K(\Delta Q_{n-m+1})$, що зберігається в блоці пам'яті ЦОП:

$$K(\Delta Q_{n-m+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} a''_i \cdot Q_i - \sum_{i=0}^{n-1} a'_i \cdot Q_i.$$

Аналогічним чином проводиться знаходження кодів відхилень всіх m неточних розрядів α -ЦАП із врахуванням поправок, що визначені на попередніх кроках.

Блок-схему алгоритму одноциклового самокалібрування ЦАП із ВН у режимі з довільним завданням калібрувального сигналу в рамках допуску δQ показано на рис. 7. При цьому ГКС може мати структуру, що показана на рис. 8. Тут α -ЦАП_{КАЛ} – калібрувальний цифро-аналоговий перетворювач, РПН_{КАЛ} – калібрувальний регістр послідовного наближення. При цьому, додатковий калібрувальний α -ЦАП_{КАЛ} із ВН використовується для забезпечення встановлення потрібного значення вихідного калібрувального сигналу $A_{КАЛi}$ і нерозривності вихідної характеристики.

У цьому випадку калібрувальний сигнал формується, виходячи з такої умови (для $\alpha=1,618$):

$$A_{КАЛ\ n-m} = \begin{cases} Q_{n-m}, & \text{якщо } Q_{n-m} > Q_{n-m-1} + Q_{n-m-2}; \\ Q_{n-m-1} + Q_{n-m-2}, & \text{якщо } Q_{n-m} \leq Q_{n-m-1} + Q_{n-m-2}. \end{cases}$$

Після встановлення калібрувального сигналу $A_{КАЛ\ n-m}$ проводиться його подвійне врівноваження із вмиканням і без вмиканням $(n-m)$ -го розряду і обчислюється код відхилення цього розряду. Після цього по команді БК відбувається перехід до самокалібрування наступного $(n-m+1)$ -го розряду.

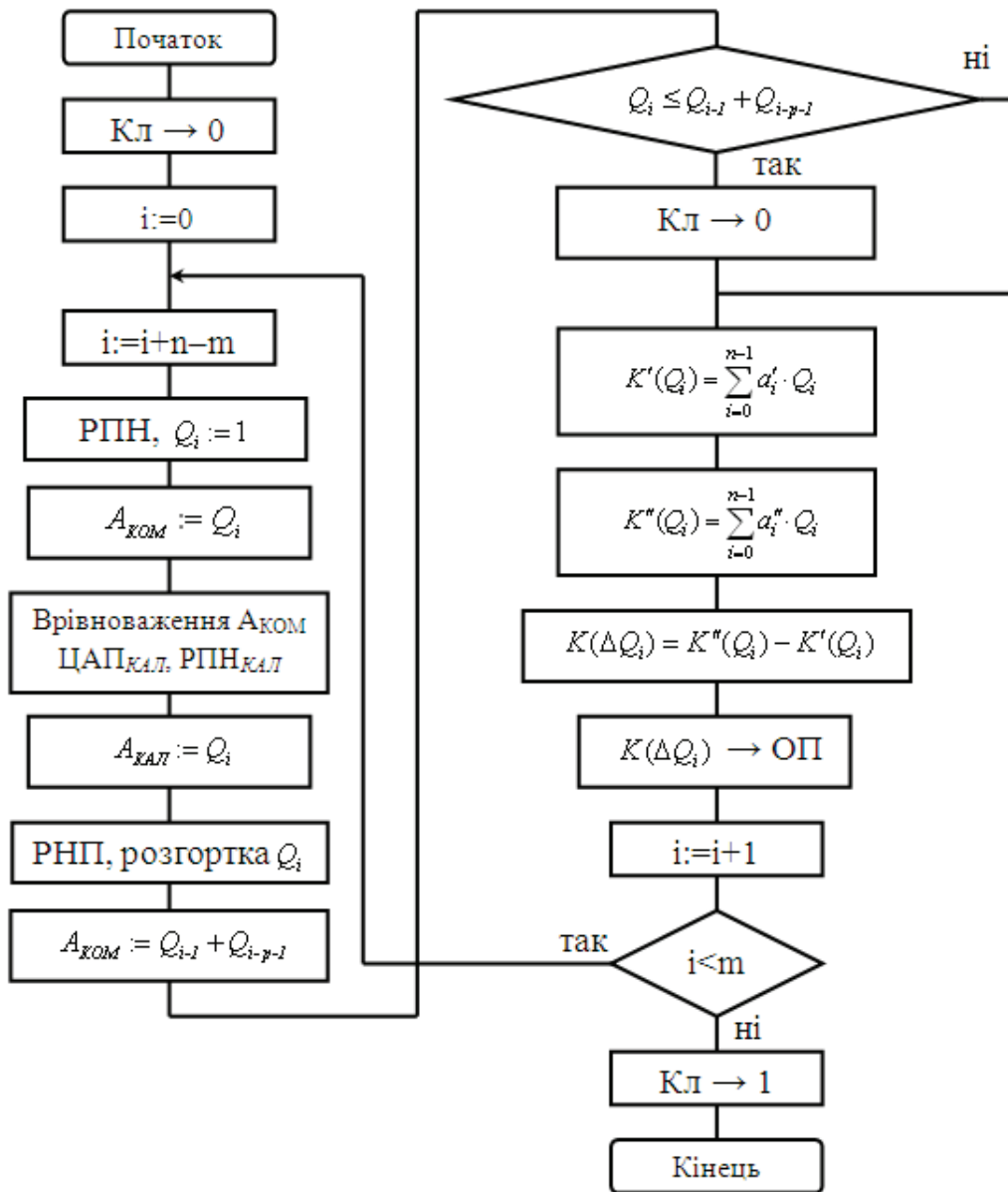


Рисунок 7 - Блок-схема алгоритму одноциклового самокалібрування ЦАП із ВН у режимі з довільним завданням калібрувального сигналу в рамках допуску δQ

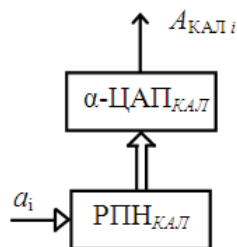


Рисунок 8 - Структурна схема ГКС

При організації процедури самокалібрування ЦАП згідно багатоциклової стратегії з осередненням на розгортках (рис. 9) структурна схема ГКС також може мати вигляд, як показано на рис. 8. При цьому, по команді БК за допомогою РПН виконується ряд розгортки розряду, що калібрується. Далі відбувається визначення і встановлення відповідних калібрувальних сигналів за допомогою основних і калібрувальних ЦАП і РПН, а також ряд подвійних врівноважень. Після того у ЦОП на основі множини

отриманих коригувальних поправок визначається код відхилення i -го неточного розряду, що зберігається в пам'яті ЦОП.

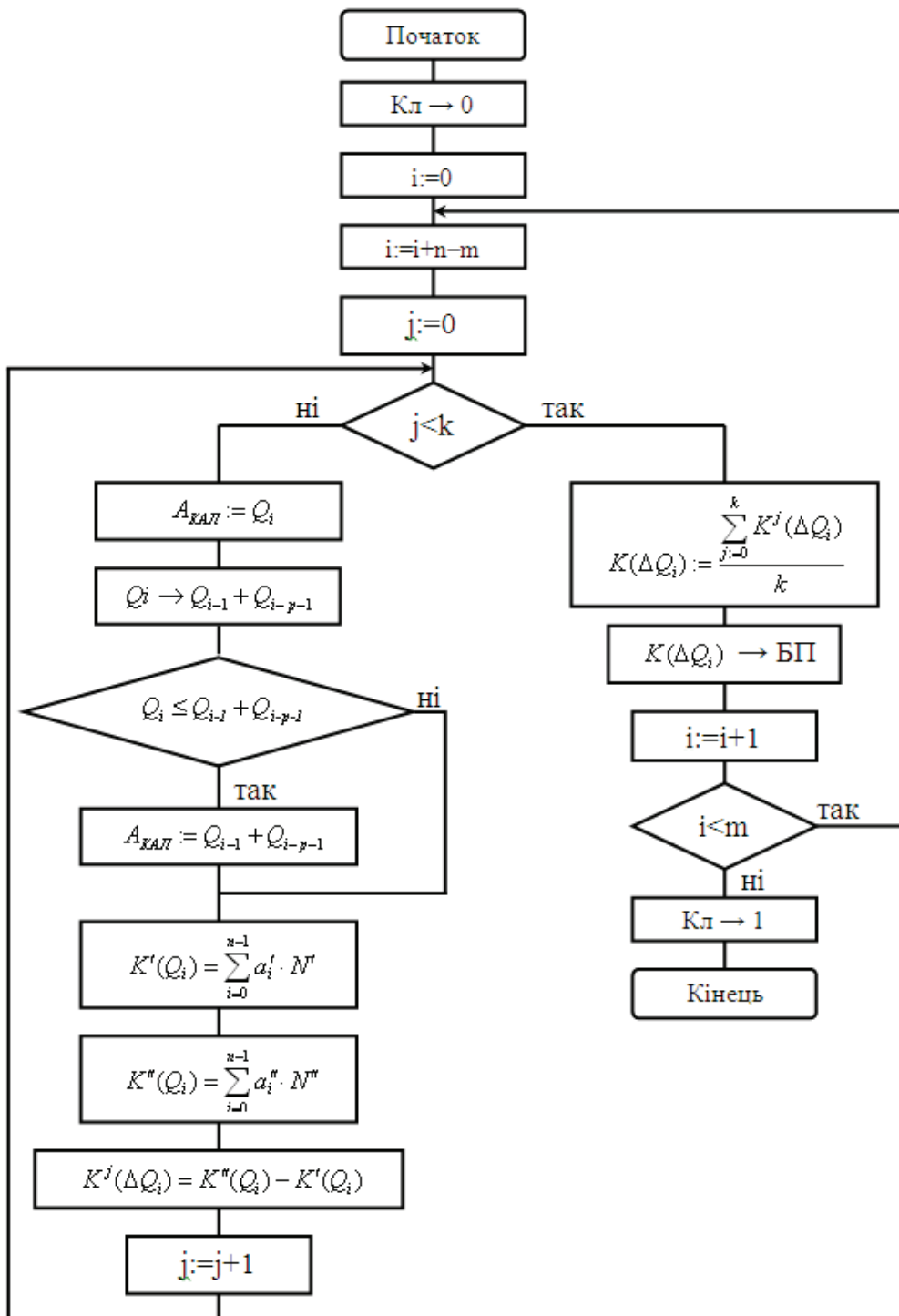


Рисунок 9 - Блок-схема алгоритму роботи ЦАП із ВН в режимі багатоциклового самокалібрування з осередненням на розгортках

Виконано комп'ютерне моделювання вищеписаних стратегій самокалібрування. Отримано графік розподілу щільності імовірності інтегральної нелінійності ХП по діапазону $A_{ВМХ}$ для 15-ти розрядного ЦАП із $\alpha=1,618$ з $\delta Q=15\%$. (рис. 10), а також графік розподілу щільності імовірності похибки лінійності ваг старших розрядів [1] такого ЦАП (рис. 11). Легко помітити, що після застосування самокалібрування похибка лінійності ваг розрядів та нелінійність ХП ЦАП значно

зменшується. На рис. 10, 11 крива *a* відповідає розподілу без застосування самокалібрування, а крива *b* – розподілу з застосуванням самокалібрування. Наведені дані підтверджують позитивний ефект застосування процедур самокалібрування.

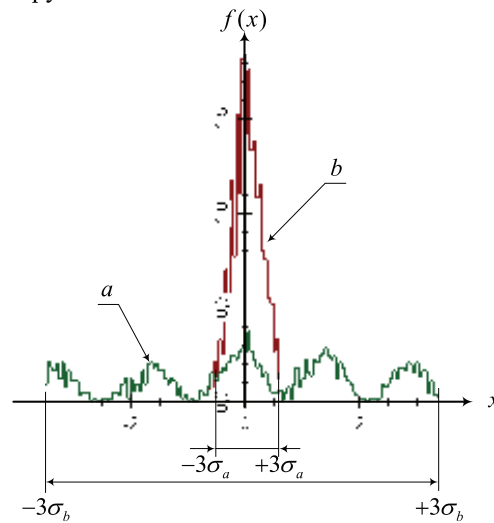


Рисунок 10 - Розподіл щільності імовірності інтегральної нелінійності по діапазону $A_{ВИХ}$

У табл. 1, 2 наведено результати комп'ютерного моделювання ЦАП із ВН, що самокалібруються, на основі системи числення з $\alpha=1,618$ та допуском на елементну базу $\delta Q=15\%$. При цьому С1, С2, С3 відповідають стратегіям одноциклового самокалібрування із завданням індивідуального рівня калібрувального сигналу, із довільним завданням калібрувального сигналу в рамках допуску δQ та багаточислової стратегії з осередненням на розгортках відповідно.

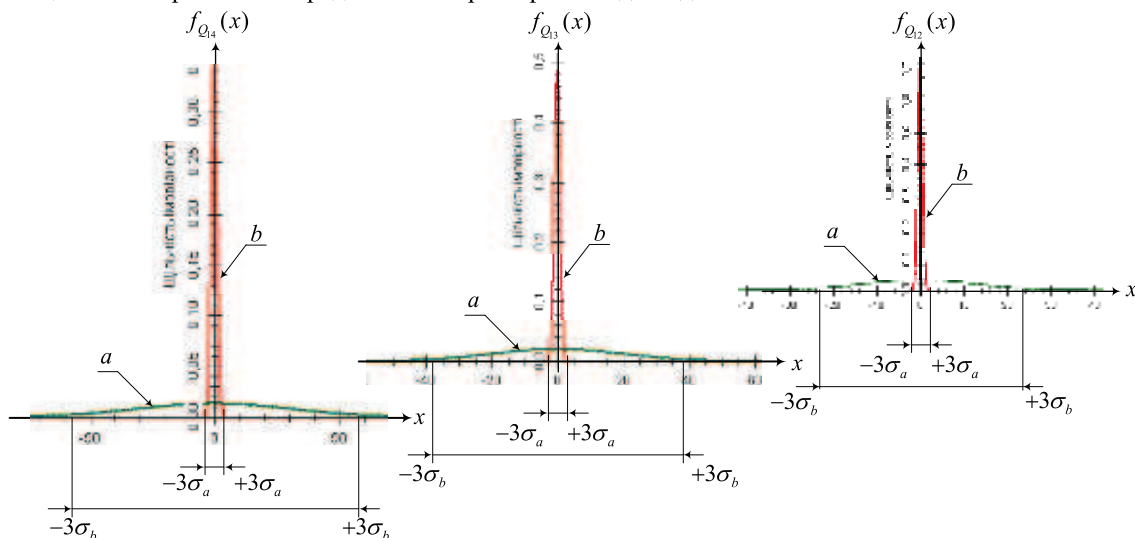


Рисунок 11 - Розподіл щільності імовірності похибки лінійності ваг розрядів

Для визначення закономірності зменшення похибки, що коригується, було обчислено значення інтегральної та диференціальної нелінійностей для 100 різних базисів ваг розрядів ЦАП із ВН. Після того було обчислено математичне сподівання та середньоквадратичне відхилення для вибірки за такими формулами:

$$M(\Delta\bar{Q}) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta\bar{Q}_i,$$

де n – обсяг вибірки, $\Delta\bar{Q}_i$ – значення похибки, що оцінюється, в i -й вибірці;

$$\sigma(\Delta\bar{Q}) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} [\Delta\bar{Q}_i - M(\Delta\bar{Q})]^2}.$$

Таблиця 1 – Статистичні характеристики ІНЛ для різних стратегій самокалібрування ЦАП із ВН

Кількість розрядів $n_2(n_a)$	M(ІНЛ)				σ(ІНЛ)			
	Без С.К.	С1	С2	С3	Без С.К.	С1	С2	С3
16 (23)	567,26	0,3417	0,3327	0,3970	419,12	0,2034	0,1923	0,1751
14 (20)	158,37	0,3228	0,3548	0,4364	112,49	0,2053	0,2048	0,2184
12 (18)	53,437	0,2813	0,3190	0,4066	36,999	0,1927	0,2001	0,1912

Таблиця 2 – Статистичні характеристики ДНЛ для різних стратегій самокалібрування ЦАП із ВН

Кількість розрядів $n_2(n_a)$	M(ДНЛ)				σ(ДНЛ)			
	Без С.К.	С1	С2	С3	Без С.К.	С1	С2	С3
16 (23)	1221,8	2,6998	2,6463	2,6525	760,07	0,1100	0,0770	0,0787
14 (20)	292,21	2,6917	2,6368	2,6225	167,84	0,1118	0,0643	0,0176
12 (18)	98,499	2,6534	2,6274	2,6372	61,720	0,0846	0,0464	0,0619

Критерієм ефективності усіх стратегій самокалібрування ЦАП є зменшення абсолютної похибки перетворення ПФІ після проведення самокалібрування. Так, абсолютне значення похибки перетворення до проведення процедури цифрового самокалібрування ЦАП можна визначити як:

$$A_{ВИХ} = A_{ВИХ id} + \Delta_{\Sigma},$$

де $A_{ВИХ id}$ – це аналоговий еквівалент вхідного цифрового сигналу при відсутності похибок у каналі перетворення, Δ_{Σ} – загальна похибка наскрізного каналу ЦА-перетворення, що визначається як [3]:

$$\Delta_{\Sigma} = \sqrt{\Delta_{\Sigma ПКС}^2 + \Delta_{\Sigma АК}^2 + \Delta_{\Sigma Б}^2 + \Delta_{\Sigma ПСН}^2}.$$

Після проведення процедури цифрового самокалібрування ЦАП абсолютне значення похибки перетворення можна визначити як:

$$A_{ВИХ СК} = A_{ВИХ id} + \Delta_{\Sigma СК}.$$

де $\Delta_{\Sigma СК}$ – похибка наскрізного каналу ЦА-перетворення після проведення самокалібрування, що визначається як [3]:

$$\Delta_{\Sigma СК} = \sqrt{\Delta_{ДНЛ МСК}^2 + \Delta_{ІНЛ МСК}^2 + \Delta_{М МСК}^2 + \Delta_{КВ ЦАП}^2 + \Delta_{РОЗ}^2}.$$

Ефективність застосування процедури цифрового самокалібрування можна визначити як відношення абсолютної похибки перетворення до і після процедури самокалібрування:

$$E = \frac{\Delta A_{ВИХ}}{\Delta A_{ВИХ СК}} = \frac{(A_{ВИХ id} + \Delta_{\Sigma}) - A_{ВИХ id}}{(A_{ВИХ id} + \Delta_{\Sigma СК}) - A_{ВИХ id}} = \frac{\Delta_{\Sigma}}{\Delta_{\Sigma СК}}.$$

У табл. 3 наведено оцінки ефективності різних стратегій самокалібрування ЦАП із ВН, розраховані на основі значень математичного сподівання ІНЛ та ДНЛ із табл. 1 та табл. 2.

Таблиця 3 – Ефективність стратегій самокалібрування ЦАП із ВН

Кількість розрядів $n_2(n_a)$	Е(ІНЛ)			Е(ДНЛ)		
	С1	С2	С3	С1	С2	С3
16 (23)	1660,1	1705	1428,9	452,55	461,7	460,62
14 (20)	490,61	446,36	362,9	108,55	110,82	111,42
12 (18)	189,96	167,51	131,42	37,12	37,489	37,35

Аналіз наведених даних показує, що ефективність самокалібрування ЦАП із ВН зростає в міру зростання кількості розрядів ЦАП та залежить від обраної стратегії самокалібрування.

Висновки

1. Проаналізовано стратегії цифрового самокалібрування характеристики перетворення ЦАП із ВН. Доведено, що використання цифрового самокалібрування ХП дозволяє істотно (на $1\div 2$ порядки) зменшити похибки ХП порівняно з похибками первинної елементної бази, а це дозволяє будувати високоточні ЦАП, побудовані на спрощеній елементній базі.

2. Визначено критерій ефективності та оцінено ефективність різних стратегій самокалібрування ЦАП із ВН. Показано, що ефективність самокалібрування вказаних пристроїв зростає в міру зростання розрядності ЦАП із ВН, а також при зниженні вимог на розкид параметрів елементної бази та залежить від обраної стратегії самокалібрування.

3. Надано рекомендації щодо побудови ЦАП із ВН, що самокалібруються, побудованих на неточних елементах. Похибка перетворення таких ЦАП відповідає заданим значенням і практично не залежить від параметрів навколишнього середовища.

Література

1. Азаров О. Д. Багаторозрядні АЦП і ЦАП із ваговою надлишковістю, стійкі до параметричних відмов. Монографія / О.Д. Азаров, О.В. Кадук. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2010. – 150 с.
2. Захарченко С. М. Самокалібровані АЦП із накопиченням заряду на основі надлишкових позиційних систем числення : монографія / Захарченко С. М., Азаров О. Д., Харков О. М.; під заг. ред О. Д. Азарова. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2005. – 235 с.
3. Азаров О.Д. Кориговані і некориговані похибки багаторозрядних ПФІ, що самокалібруються, з ваговою надлишковістю / О.Д. Азаров, О.В. Кадук, О.В. Дудник //Оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології, – 2009.– №2. С. 99 – 110.
4. Гнатек Ю. Р. Справочник по цифроаналоговым и аналогоцифровым преобразователям / Гнатек Ю. Р. – М. : Радио и связь, 1982. – 552 с
5. Грушвицкий Р. И. Аналого-цифровые периферийные устройства микропроцессорных систем / Р. И. Грушвицкий, А. Х. Мурсаев, В. Б. Смолов. – Л. : Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1989. – 160 с. – ISBN 5-283-04450-5.
6. Rombouts P. Comments on «Interstage Gain-Proration Technique for Digital-Domain Multistep ADC Calibration» / Rombouts P., Weyten L. // IEEE Trans. Circuit Syst. II. – August 1999. – Vol. CAS-46. – P. 1114-1116.
7. Hans Camenzind. Designing Analog Chips / Hans Camenzind. – 2005. – p. 242.
8. Азаров О. Д. Аналого-цифрове порозрядне перетворення на основі надлишкових систем числення з ваговою надлишковістю. Монографія / О.Д. Азаров. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2010. – 232 с.

Відомості про авторів

Азаров Олексій Дмитрович – д.т.н., професор, завідувач кафедри обчислювальної техніки, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна.

Кадук Олександр Володимирович – к.т.н., ст. викладач кафедри обчислювальної техніки, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна.

Дудник Олександр Вікторович – аспірант кафедри обчислювальної техніки, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна.

Росошук Анастасія Володимирівна – студентка кафедри обчислювальної техніки, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна.

УДК 618.3

С.М. ЗАХАРЧЕНКО

МЕТОД ПІДВИЩЕННЯ ШВИДКОДІЇ АЦП ІЗ ПЕРЕРОЗПОДІЛОМ ЗАРЯДУ ЗА РАХУНОК ВИКОРИСТАННЯ ВАГОВОЇ НАДЛИШКОВОСТІ

Анотація. Проведено аналіз перехідних процесів, що виникають в АЦП із перерозподілом заряду. Запропоновано метод підвищення швидкодії, який базується на використанні вагової надлишковості.

Аннотация. Проведен анализ переходных процессов в АЦП с перераспределением заряда. Предложен метод повышения быстродействия, который базируется на использовании весовой избыточности.

Abstract. A transient process analysis for charge redistribution ADC is presented. The operation speed increase method with weight redundancy use is described.

Ключові слова: аналого-цифровий перетворювач, перерозподіл заряду, вагова надлишковість, конденсаторна матриця.

Основним елементом АЦП із перерозподілом заряду є конденсаторна матриця. При застосуванні матриці вагового типу верхні платівки всіх конденсаторів з'єднано між собою та підключено до входу схеми порівняння, в той же час нижні платівки конденсаторів під'єднано до ключових елементів (КЕ), через які в процесі аналого-цифрового перетворення здійснюється комутація опорної напруги [1]. Тривалість перехідних процесів в такій структурі визначається як абсолютними значеннями ємностей конденсаторів та опорів КЕ, так і ступенем узгодження останніх між собою. При цьому у випадку ідеального узгодження перехідні процеси як такі відсутні [2]. Однак внаслідок особливостей реалізації ключових елементів, температурних та часових відхилень параметрів як конденсаторів, так і опорів КЕ досягти ідеального узгодження практично неможливо.

Відомо, що застосування вагової надлишковості при побудові АЦП дає змогу збільшити швидкість останніх [3], однак дослідження, які було проведено на сьогоднішній день в даному напрямку було спрямовано на ідеалізовані (с точки зору перехідних процесів) перетворювачі, які будуються на основі струмових або резистивних ЦАП. Перехідні процеси, а також чинники, що на них впливають, в АЦП із перерозподілом заряду суттєво відрізняються. Саме тому дослідження в цьому напрямку є актуальними.

Таким чином постає **задача** підвищення швидкодії АЦП з перерозподілом заряду за рахунок використання вагової надлишковості.

Для розв'язання задачі необхідно:

1. Побудувати математичну модель перехідних процесів, що виникають в конденсаторній матриці АЦП із перерозподілом заряду;
2. Дослідити причини, що визначають тривалість такту врівноваження;
3. Запропонувати шляхи підвищення швидкодії;
4. Оцінити результати застосування запропонованих підходів.

Для побудови математичної моделі перехідних процесів в конденсаторній матриці подамо останню у вигляді, показаному на рис. 1.

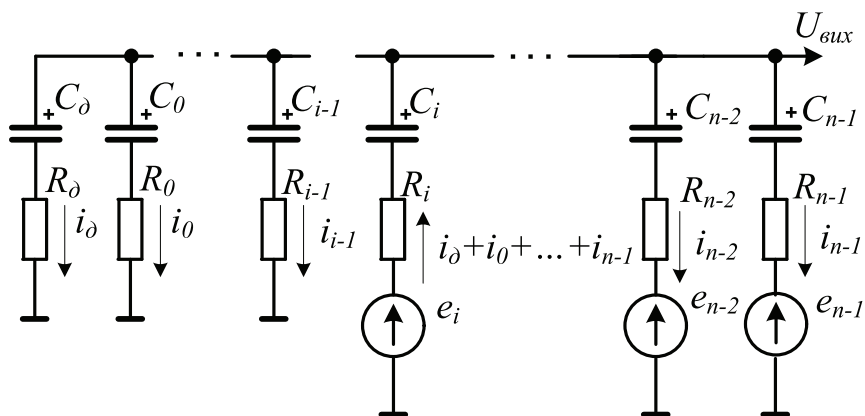


Рисунок 1 – Еквівалентна схема конденсаторної матриці.

Ємності $C_0 \div C_{n-1}$, C_∂ визначають відповідні номінали конденсаторів матриці, резистори $R_0 \div R_{n-1}$, R_∂ – опори ключових елементів відповідних гілок матриці, $e_i \div e_{n-1}$ – е.р.с., що подається у відповідну гілку матриці.

Для визначення струмів та напруг в схемі на основі законів Кірхгофа побудуємо систему рівнянь в операторній формі:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} I_j + \sum_{j=i+1}^{n-1} I_j + I_\delta \right) + \frac{\left(\sum_{j=0}^{i-1} I_j + \sum_{j=i+1}^{n-1} I_j + I_\delta \right)}{pC_i} - \frac{Uc_i}{p} + \frac{Uc_\delta}{p} + \frac{I_\delta}{pC_\delta} + I_\delta R_\delta = \frac{E_i}{p}; \\ R_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} I_j + \sum_{j=i+1}^{n-1} I_j + I_\delta \right) + \frac{\left(\sum_{j=0}^{i-1} I_j + \sum_{j=i+1}^{n-1} I_j + I_\delta \right)}{pC_i} - \frac{Uc_i}{p} + \frac{Uc_0}{p} + \frac{I_0}{pC_0} + I_0 R_0 = \frac{E_i - E_0}{p}; \\ \vdots \\ R_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} I_j + \sum_{j=i+1}^{n-1} I_j + I_\delta \right) + \frac{\left(\sum_{j=0}^{i-1} I_j + \sum_{j=i+1}^{n-1} I_j + I_\delta \right)}{pC_i} - \frac{Uc_i}{p} + \frac{Uc_{n-1}}{p} + \frac{I_{n-1}}{pC_{n-1}} + I_{n-1} R_{n-1} = \frac{E_i - E_{n-1}}{p}, \end{array} \right. \quad (1)$$

де Uc_k - напруга на k -му конденсаторі, яка сформувалась наприкінці $(n-i-1)$ -го кроку врівноваження, на першому кроці врівноваження відповідно до алгоритму роботу АЦП із ПЗ, Uc_k дорівнює $-U_{\text{вх}}$;

I_k - зображення струму в k -ій гілці матриці;

E_k/p - зображення е.р.с., що подається на k -ту гілку конденсаторної матриці. Відповідно алгоритму врівноваження $E_k = U_{\text{он}}$ або $E_k = 0$, причому $E_i = U_{\text{он}}$, а $E_\delta \div E_{i-1} = 0$.

На основі виразу (1) отримаємо зображення для струму в k -ій гілці матриці:

$$I_k = \frac{C_k \sum_{j=1}^{n-1} \frac{C_j (E_j + Uc_j)}{p\tau_j + 1}}{(p\tau_k + 1) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{C_j}{p\tau_j + 1}} - \frac{C_k (E_k + Uc_k)}{(p\tau_k + 1)}, \quad (2)$$

де $\tau_i = C_i R_i$, $C_{-1}, U_{-1}, Uc_{-1}, \tau_{-1}$ відповідно дорівнюють $C_\delta, U_\delta, Uc_\delta, \tau_\delta$.

В останньому виразі $C_j \cdot Uc_j$ - це частка вхідного заряду, яка в даний момент зберігається на j -му конденсаторі, і в подальшому буде позначатись як $Q_{\text{вх}j}$. Відповідно до закону збереження заряду

$$Q_{\text{вх}} = \sum_{j=1}^{n-1} Q_{\text{вх}j} = \sum_{j=1}^{n-1} U_{\text{вх}} \cdot C_j, \quad \text{де } U_{\text{вх}} - \text{вхідна напруга, що подається на перетворювач.}$$

$Q_{\text{к}j} = C_j \cdot E_j$ будемо називати компенсуючим зарядом j -ї гілки матриці, оскільки процес аналого-цифрового перетворення в АЦП з перерозподілом заряду спрямований на досягнення рівності:

$$\sum_{j=1}^{n-1} U_{\text{вх}} \cdot C_j = - \sum_{j=1}^{n-1} C_j \cdot E_j. \quad Q_j = Q_{\text{вх}j} + Q_{\text{к}j} \quad \text{будемо називати некомпенсованим зарядом в } j\text{-й}$$

гілці. Аналогічно $Q = Q_{\text{вх}} + Q_{\text{к}}$ - некомпенсований заряд на матриці в цілому. Оскільки $Q_{\text{вх}}$ є сталим значенням в межах одного циклу роботи перетворювача, то фактично процес перетворення полягає в тому, що методом послідовних наближень формується $Q_{\text{к}}$ такий, щоб $Q \rightarrow 0$.

З виразу (2) витікає, що тривалість перехідного процесу в k -ій гілці матриці буде визначатись не тільки параметрами C_k та R_k , а і номіналами всіх інших конденсаторів та опорів ключових елементів. Таким чином в загальному випадку тривалість перехідного процесу на довільному j -му такті врівноваження визначатиметься як $t_{m_j} = f(C_i, R_i)$, де $i = -1 \div n-1$.

Відхилення номіналів C_j та R_j визначається технологічним допуском. Припустимо що існує певна „найгірша”, комбінація відхилень, при якій час перетворення буде максимальним, і яка має місце у випадку, коли одна частина компонентів матриці має максимальне додатне відхилення, а інша частина

– максимальне від'ємне. Оскільки ключові елементи в сучасних АЦП із перерозподілом заряду реалізуються на основі польових транзисторів, то R_j це фактично опір відкритого каналу j -го ключа. З іншого боку інтегральні конденсатори реалізуються за плівковою технологією [4], тобто точність реалізації номіналів конденсаторів матриці значно вища порівняно з точністю реалізації опорів ключових елементів. Таким чином будемо вважати, що параметри перехідних процесів здебільше визначаються саме відхиленнями номіналів опорів ключових елементів, а впливом похибок номіналів конденсаторів на динамічні характеристики будемо нехтувати.

Нехай максимальне відносне відхилення номіналів опорів ключових елементів становить δR , тоді номінали опорів ключових елементів з додатнім і від'ємним відхиленням відповідно становитимуть $R_i^+ = R_i(1 + \delta R)$ та $R_i^- = R_i(1 - \delta R)$. Аналогічно стала часу для гілок з додатнім і від'ємним відхиленнями дорівнюватиме $\tau^+ = \tau(1 + \delta R)$ та $\tau^- = \tau(1 - \delta R)$. З урахуванням останнього після перетворень вираз (2) набуває вигляду:

$$I_k = \frac{C_k(Q^+(p\tau^- + 1) + Q^-(p\tau^+ + 1))}{C_\Sigma(p\tau^+ + 1)(p\tau^- + 1)} - \frac{Q_k}{(p\tau_k + 1)}, \quad (3)$$

де Q^+ та Q^- – сумарний некомпенсований заряд в гілках з додатнім і від'ємним відхиленням відповідно;

$$\tau' = \frac{C_\Sigma^- \cdot \tau^+ + C_\Sigma^+ \cdot \tau^-}{C_\Sigma}, \quad \text{де } C_\Sigma^+ = \sum C_j^+ \text{ – сумарна ємність всіх конденсаторів матриці, що}$$

знаходяться в гілках з додатнім відхиленням та $C_\Sigma^- = \sum C_j^-$ – сумарна ємність всіх конденсаторів матриці, що знаходяться в гілках з від'ємним відхиленням.

Отримавши оригінал струму з виразу (3) та зробивши відповідні перетворення напруга на виході конденсаторної матриці на i -му кроці врівноваження визначатиметься виразом

$$U_{вих}(t) = \frac{Q_i}{C_\Sigma} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\tau_i^*}{\tau'} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau'}} \right], \quad (4)$$

$$\text{де } Q_i = -U_{вх} \cdot C_\Sigma + U_{он} \cdot \sum_{j=n-i}^{n-1} a_j \cdot C_j, \quad \tau_i^* = \frac{Q_i^+ \tau^- + Q_i^- \tau^+}{Q_i}.$$

Таким чином за вищезазначених умов перехідний процес є одно-експонентним, тому в подальшому вираз (4) будемо називати 1-е моделлю. Графічну інтерпретацію виразу (4) для різних варіантів співвідношення τ_i^* та τ' показано на рис.2.

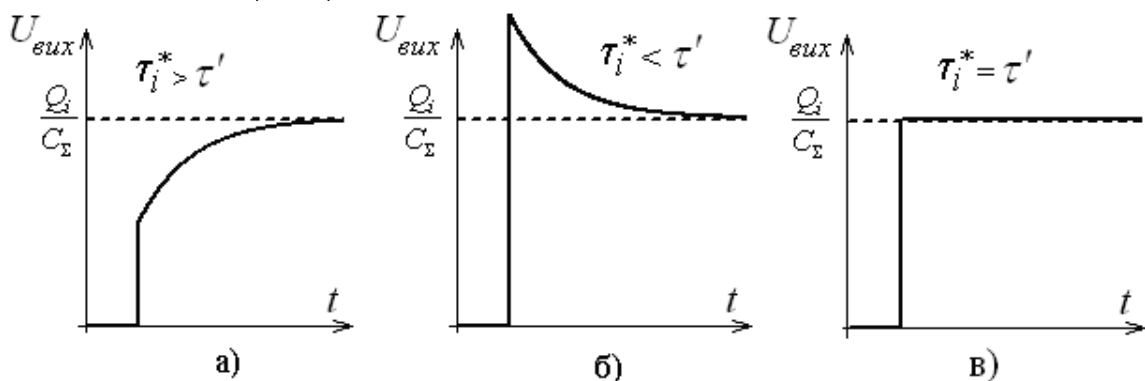


Рисунок 2 – Перехідний процес на конденсаторній матриці при використанні 1-е моделі

Як вище було зазначено, тривалість перехідних процесів визначається комбінацією відхилень сталих часу окремих гілок матриці, при цьому існує так звана „найгірша” комбінація, при якій для певного значення $U_{вх}$ спостерігається максимальна похибка диференційної або інтегральної лінійності. Для опису комбінації відхилень сталих часу будемо використовувати вектор \mathbf{K} та відносне відхилення сталої часу $\delta\tau$. Таким чином, якщо $K_i = 1$, то відповідно відхилення сталої часу i -ої гілки становитиме $\delta\tau_i = +\delta\tau$, а якщо $K_i = -1$ – $\delta\tau_i = -\delta\tau$. Вектор \mathbf{K} , який відповідає „найгіршій” комбінації будемо

називати „особливим” і позначати як K_o , а значення вхідної напруги, при якому спостерігатиметься максимальна похибка ДНЛ або ІНЛ будемо називати „особливим” значенням вхідного сигналу і позначати як U_o .

Для знаходження K_o та U_o було розроблено спеціалізоване програмне забезпечення. Дослідження показало, що незалежно від системи числення $K_o = 1, -1, -1 \dots -1$, а кодовий еквівалент $U_o - N_o = 1, 0, 0 \dots 0$. Діаграму врівноваження для цього випадку показано на рис. 3а. З рисунку видно, що похибка обумовлена невірним включенням „1” в старшому розряді.

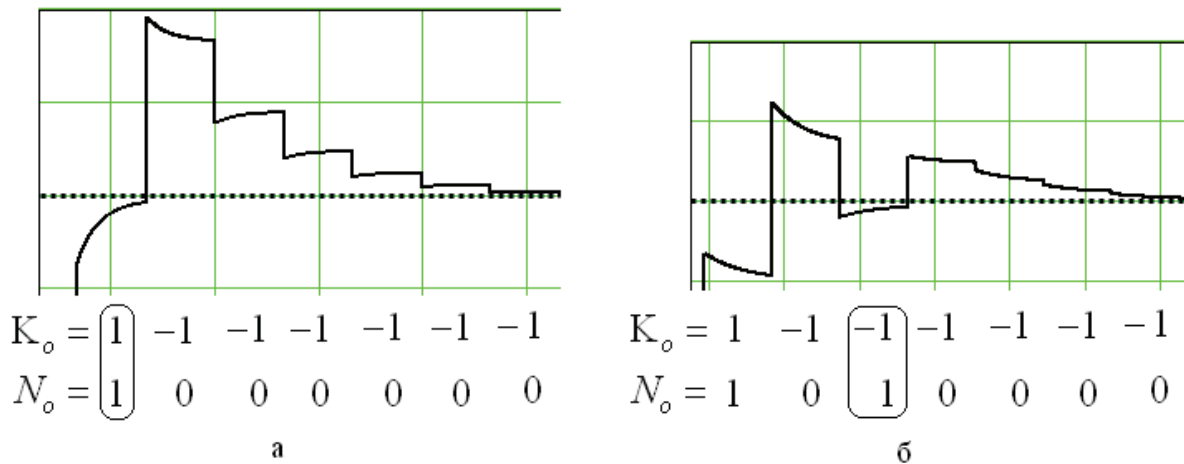


Рисунок 3 – Діаграми врівноваження для „найгіршого” випадку: а – без використання форсуючого сигналу, б – з використанням форсуючого сигналу тільки в гілках з додатнім відхиленням сталої часу.

Для уникнення даної ситуації пропонується для гілок матриці з додатнім відхиленням сталої часу в момент включення здійснювати процедуру „форсування”, тобто зменшувати сталу часу. З практичної точки зору це може бути реалізовано за допомогою додаткового форсуючого ключа, підключеного паралельно основному.

Для дослідження цього підходу не виходячи за межі 1-е моделі припускається, що в момент комутації опорної напруги в будь-яку гілку матриці, стала часу цієї гілки дорівнює $+\delta\tau$, на інших етапах врівноваження – приймає справжнє значення. Застосування такого підходу дозволило дещо зменшити тривалість такту врівноваження. Однак дослідження показало, що обмежуючим фактором подальшого збільшення швидкодії є відсутність форсування в гілках з „від’ємним” відхиленням, як це демонструє рис. 3б.

З метою подальшого покращення швидкісних характеристик перетворювача було запропоновано здійснювати форсування як в гілках з „додатнім”, так і „від’ємним” відхиленням. Для дослідження цього підходу було розроблено двоекспонентну модель (2-е модель). Вихідна напруга в даному випадку описується виразом:

$$U_{\text{вих}}(t) = \frac{Q_i}{C_\Sigma} \cdot \left[1 + K_i'' \frac{(\tau^+ - \tau'')}{Q_i} \cdot e^{-\frac{t}{\tau''}} + K_i''' \frac{(\tau^+ - \tau''')}{Q_i} \cdot e^{-\frac{t}{\tau'''}} \right], \text{ де}$$

$$K_i'' = \frac{Q^+(\tau'' - \tau^-)(\tau'' - \tau_i) + Q^-(\tau'' - \tau^+)(\tau'' - \tau_i) + Q_i(\tau'' - \tau^+)(\tau'' - \tau^-)}{(\tau'' - \tau''')(\tau'' - \tau^+)\tau''},$$

$$K_i''' = \frac{Q^+(\tau''' - \tau^-)(\tau''' - \tau_i) + Q^-(\tau''' - \tau^+)(\tau''' - \tau_i) + Q_i(\tau''' - \tau^+)(\tau''' - \tau^-)}{(\tau''' - \tau'')(\tau''' - \tau^+)\tau'''},$$

$$\tau'' = \frac{2A}{B + \sqrt{B^2 - 4AC_\Sigma}}, \quad \tau''' = \frac{2A}{B + \sqrt{B^2 + 4AC_\Sigma}},$$

$$A = C^+ \tau^- \tau_i + C^- \tau^+ \tau_i + C_i \tau^+ \tau^-, \quad B = C^+(\tau^- + \tau_i) + C^-(\tau^+ + \tau_i) + C_i(\tau^+ + \tau^-).$$

Результати проведених досліджень на прикладі 8-ми розрядного перетворювача при застосуванні різних варіантів форсування наведені на рис.4.

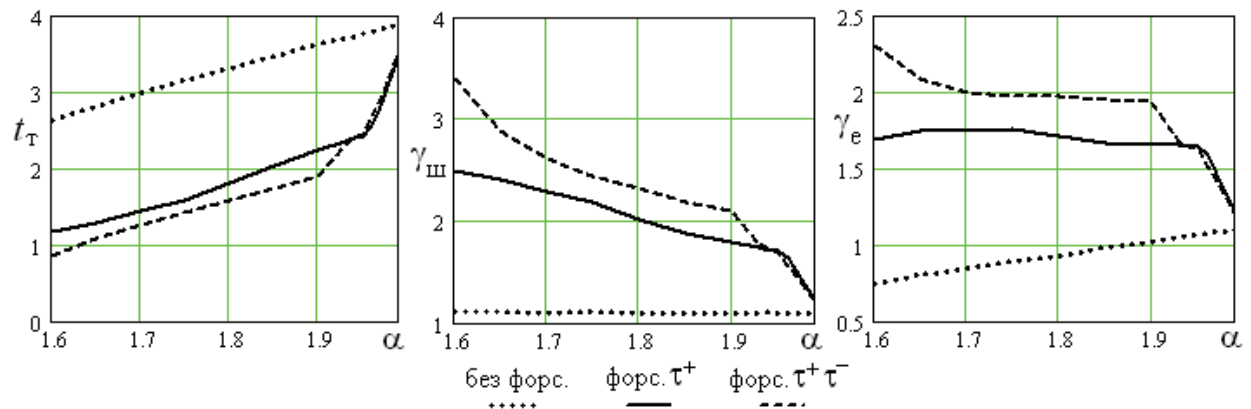


Рисунок 4 – Графічна інтерпретація дослідження різних варіантів форсування

На рис.4 $t_{T\alpha}$ - тривалість такту врівноваження в „найгіршому” випадку для системи числення α , $\gamma_{ш} = \frac{t_{T2}}{t_{T\alpha}} \cdot \gamma_n$ - коефіцієнт підвищення швидкодії, де t_{T2} - тривалість такту врівноваження в „найгіршому” випадку для двійкової системи числення, $\gamma_n = \ln 2 / \ln \alpha$ - коефіцієнт подовження розрядної сітки, $\gamma_e = \gamma_{ш} / \gamma_n$ - коефіцієнт ефективності.

Висновки

В статті розглянуто метод підвищення швидкодії АЦП із перерозподілом заряду за рахунок використання вагової надлишковості. Показано, що за умови використання системи числення з розрядними коефіцієнтами $\{1,0\}$ для досягнення ефекту необхідно здійснювати процедуру форсування, яка полягає в зменшенні сталої часу гілки матриці, в якій відбувається комутація опорної напруги. Доведено, що форсування потребують як гілки з додатнім відхиленням сталої часу, так і з від’ємним, причому в цьому випадку спостерігається максимальне збільшення швидкодії.

Література

1. McCreary J.L. All-MOS charge redistribution analog-to-digital conversion techniques - Part 1/ James L. McCreary, Paul R. Gray // IEEE J. Solid-State Circuits. - 1975. - Vol.10. - P.371-379.
2. Захарченко С.М. Самокалібровані АЦП із накопиченням заряду на основі надлишкових позиційних систем числення/ Захарченко С.М., Азаров О.Д., Харьков О.М. – Вінниця: УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2005. – 235 с. – ISBN 966-641-141-5.
3. Азаров О.Д. Основи теорії аналого-цифрового перетворення на основі надлишкових позиційних систем числення/ Азаров О.Д. – Вінниця: УНІВЕРСУМ, 2004. - 260 с. – ISBN
4. Мулявка Я. Схемы на операционных усилителях с переключаемыми конденсаторами/ Я.Мулявка; пер. с пол. М.П. Шарапова – М.: Мир, 1992. - 416 с. – ISBN 5-03-002017-9.

Відомості про автора

Захарченко Сергій Михайлович – к.т.н., доцент, Україна, м. Вінниця, Вінницький національний технічний університет, кафедра обчислювальної техніки, доцент, тел.: (0432)-598482

РАДІОВИМІРЮВАЛЬНІ ПРИЛАДИ

УДК 681.317.72

ЛІТВИХ В.В., КОШАРНА Ж.М.

СТРУКТУРНО-АЛГОРИТМІЧНИЙ МЕТОД ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ У ВОЛЬТМЕТРАХ СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНОЇ НАПРУГИ

Анотація: В даній роботі проведено класифікацію математичних моделей характеристики перетворення вимірювального каналу засобів вимірювання. Такі моделі дозволяють синтезувати двопараметричні алгоритми корекції, які суттєво зменшують не тільки адитивну та мультиплікативну похибки, але також похибку нелінійності. Використовуючи проведені дослідження запропоновано структурну схему вольтметра середньоквадратичної напруги, в якій похибка нелінійності зменшується більш ніж на порядок.

Аннотация: В данной работе проведена классификация математических моделей характеристики преобразования измерительного канала средств измерения. Такие модели позволяют синтезировать двухпараметрические алгоритмы коррекции, которые существенно уменьшают не только аддитивную и мультипликативную погрешности, но также погрешность нелинейности. Используя проведенные исследования предложена структурная схема вольтметра среднеквадратичного напряжения, в которой погрешность нелинейности уменьшается более чем на порядок.

Abstract: In this article was made a classification of the mathematical models of the conversion characteristics in the measuring channel of the measurement tools. These models allows us to synthesize two-parameter correction algorithms that significantly reduce not only the additive and multiplicative errors, but also nonlinearity error. Using this researches was propound a block diagram of a rms voltmeter, in which the nonlinearity error is reduced more than tenfold.

Вступ

Задача підвищення точності завжди була, і буде найбільш актуальною задачею інформаційно-вимірювальної техніки. Найбільш поширеною фізичною величиною є напруга змінного струму, певні параметри якої (амплітудний параметр, середньовипрямлений параметр, середньоквадратичний параметр) пов'язані з параметрами різноманітних технологічних процесів. Це зумовлює різноманітність засобів вимірювання змінної напруги (вольтметрів підгрупи ВЗ-), серед яких найбільш розповсюдженими є вольтметри середньоквадратичної напруги (ВСКН).

Покращити метрологічні характеристики ВСКН можливо використовуючи схемотехнічні, конструкторсько-технологічні та структурно-алгоритмічні методи підвищення точності засобів вимірювань [1]. В залежності від конкретних технічних вимог до ВСКН використовують різні методи підвищення точності. Як довела практика, найбільш універсальними є саме структурно-алгоритмічні методи. Серед структурно-алгоритмічних методів найбільшого використання набули методи корекції характеристики перетворення вимірювального каналу засобів вимірювання (ЗВ).

Мета і постановка задачі

Метою статті є синтез, аналіз і дослідження одного типу двопараметричного алгоритму корекції характеристики перетворення (ХП) за допомогою структурно алгоритмічних методів підвищення точності, який дозволяє суттєво зменшити всі складові систематичної похибки вимірювального каналу (ВК) вольтметрів середньоквадратичної напруги, в яких використовується лінійний перетворювач середньоквадратичної напруги з взаємо-зворотними квадраторами [2].

Розв'язання задач

Як показано в [3], найбільш загальний підхід до аналізу різних електронних пристроїв реалізується при спільному розгляді моделей ЗВ і сигналів. При цьому в якості математичної моделі ЗВ розглядається деякий оператор $F[\cdot]$, який кожній вхідній функції (функції впливу) X , визначеній на деякому функціональному просторі, ставить у відповідність функцію-відгук $F(X)$. Такий підхід зводить задачу дослідження ЗВ із заданим класом вхідних сигналів до задачі дослідження оператора $F[\cdot]$, заданого на деякому класі функцій. Як математичні моделі (ММ) f_M ХП можуть використовуватися різні типи функцій – цілі раціональні, дрібно-раціональні, ірраціональні та інші функції. Такі моделі різняться як видом, так і кількістю параметрів моделі. Моделі, вектор параметрів яких містить два елементи (тобто $A = (a_1, a_2)$), дозволяють синтезувати алгоритми двопараметричної корекції. Для реалізації таких алгоритмів потрібні дві тестові величини X_{T1}, X_{T2} , значення яких зазвичай вибирають із умови: $x_{T1} = x_{П}$, $x_{T2} = x_{К}$, де $x_{П}$, $x_{К}$ – відповідно початкове та кінцеве значення діапазону вимірювання ЗВ. Як показали попередні дослідження, алгоритми двопараметричної корекції надзвичайно ефективно зменшують вплив систематичних, а також дрейфові складових адитивної та мультиплікативної похибки, практично, незалежно від виду функції f_M . Дещо складніше забезпечити зменшення похибки нелінійності. Традиційно нелінійність ХП ВК враховується при його калібруванні. Для цього можуть використовуватися різні методики. Основу однієї з таких «традиційних» методик калібрування становить експериментальне визначення реальної характеристики перетворення (РХП) ВК шляхом послідовного підключення до входу ВК вимірюваної фізичної величини з деякими значеннями реальної ХП (РХП). Ці

значення (тобто значення тестових величин) повинні бути відомі з похибкою, суттєво меншою, ніж похибка ВК. Використовуючи значення вихідного сигналу ВК, що відповідають певному значенню тестової величини, можна здійснити апроксимацію ХП ВК (тобто отримати експериментальним шляхом РХП). Це дозволяє врахувати, і, як наслідок, зменшити вплив похибки нелінійності ВК.

Використання структурно-алгоритмічних методів дозволяє істотно спростити процедуру зменшення впливу похибки нелінійності ХП ВК. Це досягається в тому випадку, якщо математична модель ХП ВК (тобто функція f_M) адекватна РХП ВК з точки зору врахування похибки нелінійності. З огляду на різноманіття можливих математичних моделей $f_M(x, A)$, проведено класифікацію математичних моделей відповідно до типу похибки нелінійності, яку вони можуть враховувати. Така класифікація дозволяє при наявності апріорної інформації стосовно похибки нелінійності вибрати відповідну математичну модель і синтезувати алгоритм корекції, який забезпечить зменшення впливу всіх складових похибки ВК – адитивної, мультиплікативної похибки, а головне - похибки нелінійності усього при двох значеннях тестової величини (рис. 1).

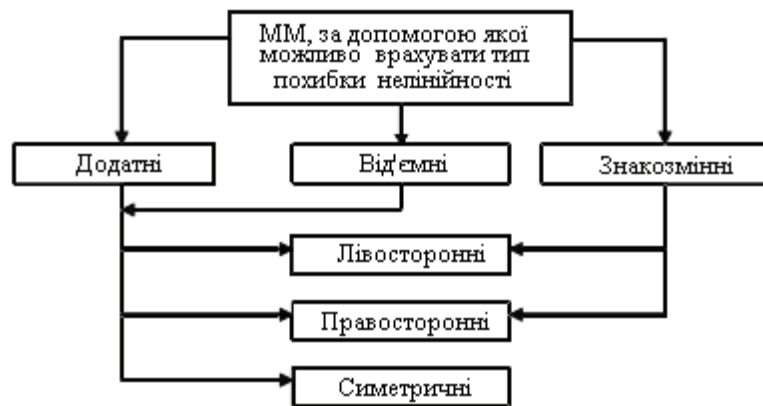


Рисунок 1 – Класифікація математичних моделей за типом похибки нелінійності, яку вони враховують

В основу класифікації математичних моделей покладено графічну модель похибки нелінійності ВК ВСКН. Запропоновано похибки нелінійності поділяти на:

- додатні – $\Delta_H(x) \geq 0, x \in [x_H, x_K]$;
- від'ємні – $\Delta_H(x) \leq 0, x \in [x_H, x_K]$;
- знакозмінні (які приймають як додатне, так і від'ємне значення) – $\Delta_H(x) \geq 0, \Delta_H(x) \leq 0, x \in [x_H, x_K]$.

Варто відмітити, що при реалізації двопараметричних алгоритмів корекції похибка ВК, який корегують, дорівнює нулю в точках $x = x_{T1}$; $x = x_{T2}$.

Як опуклі, так і увігнуті похибки нелінійності запропоновано поділяти на:

- лівосторонні (екстремум похибки нелінійності зміщений вліво відносно середини відрізка $[x_H, x_K]$);
- правосторонні (екстремум похибки нелінійності зміщений вправо відносно середини відрізка $[x_H, x_K]$);
- симетричні (екстремум похибки нелінійності знаходиться приблизно посередині відрізка $[x_H, x_K]$)

Знакозмінні похибки нелінійності в свою чергу можна поділяти на:

- лівосторонні (максимум похибки нелінійності зміщений вліво відносно середини відрізка $[x_H, x_K]$);
- правосторонні (максимум похибки нелінійності зміщений вправо відносно середини відрізка $[x_H, x_K]$).

Проаналізовано математичні моделі різного виду, що дозволяють врахувати той або інший з перерахованих видів похибки нелінійності. Аналіз проводився в програмному середовищі *Mathcad*, для чого була створена певна програма аналізу. До моделей, які враховують певний вид похибки нелінійності, пред'явлені особливі вимоги: характер нелінійності, яку вони враховують, не повинен залежати від значення параметрів (a_1, a_2) математичної моделі. Ця вимога істотно скоротила кількість можливих математичних моделей.

Математична модель РХП ВК у ВСКН може бути представлена у вигляді функції f_R наступного виду:

$$f_R(u_X) = f_I(u_X)(1 + \gamma) + \Delta_Y + \Delta_H(u_X), \quad u_X \in [u_{II}, u_K], \quad (1)$$

де γ - відносна мультиплікативна похибка ВСКН; Δ_Y - абсолютна адитивна похибка ВСКН по виходу; $\Delta_H(u_X)$ - похибка нелінійності (або неквадратичності якщо ІХП $f_I(u_X) = K_N u_X^2$) ВСКН, u_{II} , u_K - відповідно початкове та кінцеве значення діапазону вимірювання ВСКН.

Абсолютну похибку $\Delta_Y(u_X)$ ВК по виходу можна подати у вигляді:

$$\Delta_Y(u_X) = f_R(u_X) - f_I(u_X) = f_I(u_X)\gamma + \Delta_Y + \Delta_H(u_X), \quad u_X \in [u_{II}, u_K]. \quad (2)$$

За для скорочення позначень подалі як середньоквадратичне значення напруги u_X буде використовуватись символ x , та як значення вихідної напруги - символ y .

Компенсацію систематичних складових адитивної та мультиплікативної похибок в (2) можна формально розглядати як використання двопараметричного алгоритму корекції [1].

Алгоритми двопараметричної корекції синтезуються в разі, коли для апроксимації РХП обрана модель $f_M(x; \mathbf{A})$, вектор \mathbf{A} параметрів якої містить два елементи: $\mathbf{A} = (a_1; a_2)$ [4].

Числовий алгоритм двопараметричної корекції (ЧАДПК) представляє собою послідовність операцій, в результаті виконання яких фіксують два значення інформативного параметра вихідного сигналу $s_y(t)$ ВК - $y_{RT1} = f_R(x_{T1})$ та $y_{RT2} = f_R(x_{T2})$, які використовують для обчислення значень \hat{a}_1, \hat{a}_2 параметрів моделі шляхом розв'язання системи рівнянь:

$$\begin{cases} y_{RT1} = f_M(x_{T1}; \hat{a}_1, \hat{a}_2); \\ y_{RT2} = f_M(x_{T2}; \hat{a}_1, \hat{a}_2). \end{cases} \quad (3)$$

Перехід від однопараметричної до більш складних моделей, що містять два параметри, може бути здійснений на основі декількох підходів. Перший підхід заснований на ускладненні однопараметричної моделі з кожного класу дійсних функцій дійсного змінного.

Наприклад, двопараметричну модель виду:

$$f_M(x; a_1; a_2) = a_1 + a_2 x^n, \quad x \in [x_{II}, x_K] \quad (4)$$

можливо розглянути як результат введення в модель $f_M(x; a) = a + x^n$, $x \in [x_{II}, x_K]$, $n \approx 2$ параметра a_2 (при $a \equiv a_1$), або як результат введення в модель $f_M(x; a) = a \cdot x^n$, $x \in [x_{II}, x_K]$ параметра a_1 (при $a \equiv a_2$).

Або двопараметричну модель виду:

Цю модель отримано шляхом ускладнення моделі (4).

$$f_M(x, a_1, a_2) = \sqrt{a_1 + (1 + a_2)x^n}, \quad x \in [x_{II}, x_K]. \quad (5)$$

Система рівнянь (3), розв'язанням якої знаходять значення параметрів \hat{a}_1, \hat{a}_2 моделі (5), має вид:

$$\begin{cases} y_{RT1} = \sqrt{\hat{a}_1 + (1 + \hat{a}_2)x_{T1}^n}; \\ y_{RT2} = \sqrt{\hat{a}_1 + (1 + \hat{a}_2)x_{T2}^n}. \end{cases}$$

Значення \hat{a}_1, \hat{a}_2 параметрів моделі знаходять завдяки наступній формулі:

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = (y_{IT1}^n y_{RT2}^2 - y_{RT1}^2 y_{IT2}^n) / (y_{IT1}^n - y_{IT2}^n); \\ \hat{a}_2 = (y_{RT1}^2 - y_{RT2}^2 - y_{IT1}^n + y_{IT2}^n) / (y_{IT1}^n - y_{IT2}^n). \end{cases}$$

де $y_{IT1} = f(x)_{x=x_{T1}}$ та $y_{IT2} = f(x)_{x=x_{T2}}$.

Оскільки функція f_M^{-1} має вид:

$$f_M^{-1}(y; \hat{a}_1, \hat{a}_2) = [(y^n - \hat{a}_1) / (1 + \hat{a}_2)]^{1/n}, \quad y \in D(f_M), \quad (6)$$

то, підставляючи у формулу (6) значення $y = y_R$, знайдемо приблизне ЗІП \hat{x} вхідного сигналу:

$$\hat{x} = f_M^{-1}(y_R; \hat{a}_1; \hat{a}_2) = \left(\frac{y_R^n (y_{IT1}^n - y_{IT2}^n) - y_{IT1}^n y_{RT2}^2 + y_{IT2}^n y_{RT1}^2}{y_{RT1}^2 - y_{RT2}^2} \right)^{1/n}.$$

Використовуючи приблизне значення \hat{x} в якості аргументу функції $f_I(x) = x$, $x \in [x_{II}, x_K]$, отримуємо вираз для ЧАДПК, який було синтезовано з моделі (5):

$$y_C = f_I(\hat{x}) = \hat{x} = \left(\frac{y_R^n (y_{IT1}^n - y_{IT2}^n) - y_{IT1}^n y_{RT2}^n + y_{IT2}^n y_{RT1}^n}{y_{RT1}^n - y_{RT2}^n} \right)^{1/n}. \quad (7)$$

Вираз (7) представляє собою ЧАДПК за допомогою якого можна підвищувати точність ВК ВСКН.

Структурна схема прецизійного вольтметра середньоквадратичної напруги (ПВСКН), в якому, для підвищення точності, використовуються структурно-алгоритмічні методи підвищення точності зображена на рис. 2. До складу ПВСКН входить перемикач П через який в положенні "а" подається вимірювана напруга, а в положенні "б" – опорна напруга від джерела опорної напруги (ДОН) на підсилювач змінної напруги (ПЗН). Після підсилення ЗН передається на ПСКН зі взаємозворотними квадраторами. ПСКН складається з прямого (ПКП) та зворотного (ЗКП) квадратичних перетворювачів, суматора, подільника напруги (ПН), а також джерела постійної напруги (ДПН) та підсилювача постійної напруги (ППН). Після ПСКН вже постійна напруга потрапляє на аналого-цифровий перетворювач (АЦП) де перетворюється на код. Код, значення якого відповідає поданій напрузі запам'ятовується в пам'яті контролера К і далі передається або на ДОН або, якщо це кінцевий результат, на цифровий відліковий пристрій (ЦВП).

В першому такті на вхід ПЗН через перемикач П від ДОН подається опорна напруга $X_{O1}(t)$ з істинним середньоквадратичним значенням x_{O1} , значення якої в вигляді коду y_{O1} зберігається в пам'яті контролера К. Ця напруга підсилюється, перетворюється в постійну напругу за допомогою ПСКН а потім в код y_{OR} за допомогою АЦП, значення якого запам'ятовується в пам'яті контролера К.

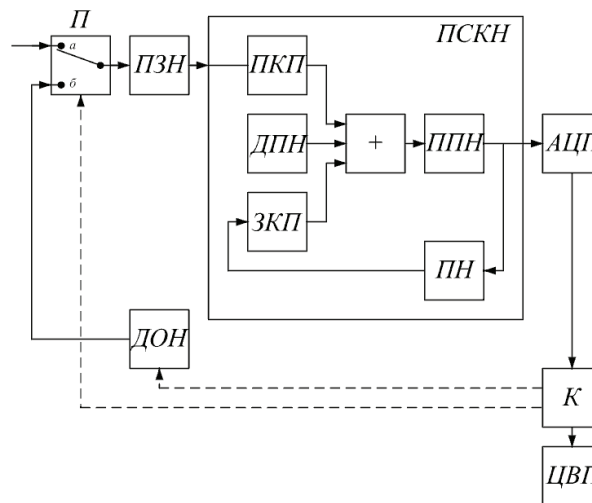


Рисунок 2 – Структурна схема прецизійного вольтметра середньоквадратичної напруги.

В другому такті на вхід ПЗН через перемикач П від ДОН подається опорна напруга $X_{O2}(t)$ з істинним середньоквадратичним значенням x_{O2} , значення якої в вигляді коду y_{O2} зберігається в пам'яті контролера К. Ця напруга підсилюється, перетворюється в постійну напругу за допомогою ПСКН а потім в код y_{2OR} за допомогою АЦП, значення якого запам'ятовується в пам'яті контролера К.

В третьому такті на вхід ПЗН через перемикач П подається вимірювана напруга $U_X(t)$, яка підсилюється, перетворюється в постійну напругу за допомогою ПСКН а потім в код y_{XR} за допомогою АЦП, значення якого заноситься в пам'ять контролера К.

В контролері К здійснюється обчислення результату вимірювання y_X за формулою:

$$y_X = \left(\frac{y_{XR}^2 (y_{1OR}^{[2+(n_P-n_3)]} - y_{1O1}^{[2+(n_P-n_3)]}) - y_{1O1}^{[2+(n_P-n_3)]} y_{2OR}^2 + y_{2O1}^{[2+(n_P-n_3)]} y_{1OR}^2}{y_{1OR}^2 - y_{2OR}^2} \right)^{1/c},$$

де y_{1O1} - значення у вигляді коду істинного середньоквадратичного значення (x_{1O1}) опорної напруги $X_{O1}(t)$ котра подається з ДОН у першому такті;

y_{2O1} - значення у вигляді коду істинного середньоквадратичного значення (x_{2O1}) опорної напруги $X_{O2}(t)$ котра подається з ДОН у другому такті;

n_P, n_3 - показники ступеня характеристики перетворення прямого та зворотного квадраторів відповідно.

На рис. 3 наведено результати моделювання похибки нелінійності, де видно, що похибка нелінійності ВСКН зменшується в декілька разів [5].

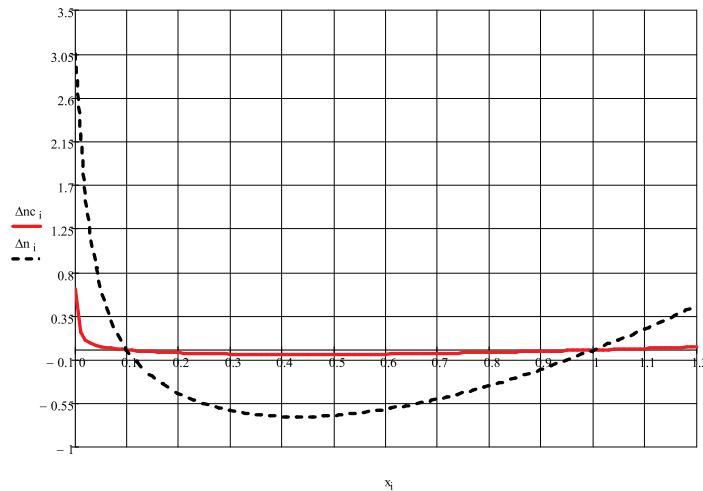


Рисунок 3 - результати моделювання похибки нелінійності ВСКН

Висновки

Використання структурно-алгоритмічних методів дозволяє істотно спростити процедуру зменшення впливу похибки нелінійності. Це досягається в тому випадку, якщо математична модель ХП ВК (тобто функція f_M) адекватна РХП ВК з точки зору врахування похибки нелінійності ВК. Враховуючи різноманіття можливих математичних моделей $f_M(x, A)$, була приведена їх класифікація за типом похибки нелінійності, яку вони можуть враховувати. Така класифікація дозволить при наявності апріорної інформації про вид похибки нелінійності обрати відповідну модель і синтезувати алгоритм корекції, який забезпечить зменшення впливу, в тому числі і похибки нелінійності усього при двох значеннях тестової величини. Використовуючи дослідження, які було проведено, створено ПВСКН, похибку нелінійності якого було зменшено в декілька разів.

Список літератури

1. Литвих В.В. Исследование метода мультипликативной коррекции погрешностей и разработка преобразователей переменного напряжения на его основе: Автореферат. Диссертация кандидата технических наук. – Киев, 1974, 32 с.
2. Волгин Л.И. Линейные электрические преобразователи для измерительных приборов и систем. – М.: Сов.радио, 1971. – 334с.
3. Марченко Б.Г., Щербак Л.Н. Линейные случайные процессы и их приложения. – К.: Наукова думка, 1975. – 143 с.
4. Литвих В.В. Разработка методов коррекции характеристики преобразования измерительного канала и реализация на их основе широкополосных вольтметров среднеквадратического напряжения. – К.: 1999. – 354с.
5. Патент на корисну модель № 54057. Україна, МПК (2009) G01R 19/12. Цифровий вольтметр середньоквадратичної напруги, /Літвіх В.В., Кошарна Ж.М., Прохоренко І.В.// заявник та патентовласник НТУУ «КПІ», заявлено 23.04.2010, опубліковано 25.10.2010, Бюл. № 20, 2010р.і

Відомості про авторів

Літвіх Віктор Вікторович – д.т.н., професор кафедри автоматизації експериментальних досліджень, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут «КПІ»», вул. Політехнічна, 41, м. Київ, 03056, тел. (044) 454-98-93, litvikh@aer.ntu-kpi.kiev.ua

Кошарна Жанна Миколаївна – аспірант кафедри автоматизації експериментальних досліджень, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут «КПІ»», вул. Політехнічна, 41, м. Київ, 03056, тел. 098-718-00-51, Zhanna_Kosharna@ukr.net

УДК 621.3.011.212

Л.Б. ЛІЩИНСЬКА

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ N-КАСКАДНОГО З'ЄДНАННЯ БАГАТОПАРАМЕТРИЧНИХ УПН

Анотація. Розроблена математична модель N-каскадного з'єднання багатопараметричних УПН, яка дозволяє оцінити залежність перетвореного імпедансу, коефіцієнтів перетворення, чутливості коефіцієнтів перетворення, запасу стійкості і максимально-досяжного коефіцієнта підсилення УПН на межі стійкості в залежності від параметрів окремих каскадів, перетворених імпедансів та кількості каскадів N.

Ключові слова: імпеданс, узагальнений перетворювач імпедансу, багатопараметричний УПН.

Аннотация. Разработана математическая модель N-каскадного соединения многопараметрических ОПН, которая позволяет оценить зависимость преобразованного импеданса, коэффициентов превращения T, чувствительности коэффициентов превращения, запаса стойкости и максимально-достижимого коэффициента усиления ОПН на границе стойкости в зависимости от параметров отдельных каскадов, преобразуемых импедансов и количества каскадов N.

Ключевые слова: импеданс, обобщенный преобразователь импеданса, многопараметрический ОПН.

Abstract. The mathematical model of N-cascade connection of manyparameters GPI_N is developed, which allows to estimate dependence of regenerate immittance, coefficients of transformation of T, sensitiveness of coefficients of transformation, supply of firmness and maximal-accessible amplification of GPI_N factor on the border of firmness depending on the parameters of separate cascades, transformed immittances and amounts of cascades of N.

Keywords: immittance, generalized transformer of immittance, manyparameters GPI_N.

Вступ

Багатопараметричний узагальнений перетворювач імпедансу (УПН) являє собою, як правило, активний N-полюсник, перетворений ($W_{вих}$) імпеданс якого залежить від перетворених імпедансів (W_1, \dots, W_N). У якості такого перетворювача можуть використовуватися однокристальні УПН, наприклад на основі двохзатворного польового транзистора (ПТ) (рис. 1.а) або багатокаскадні УПН, що використовують декілька транзисторних каскадів (рис. 1.б).

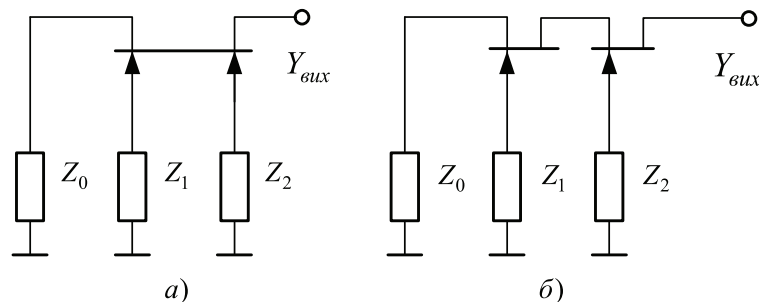


Рисунок 1 – Двокаскадні УПН на базі двохзатворного (а) і двох однозатворних ПТ

При цьому виникає необхідність аналітичного опису основних параметрів УПН в залежності як від параметрів кожного каскаду, так і від параметрів перетворених імпедансів Z_N . Для однопараметричних УПН таке завдання частково вирішене в [1]. Зокрема, отримано аналітичні вирази для коефіцієнтів перетворення імпедансу – T_k і T_i , інваріантного коефіцієнта стійкості – K_u і чутливості коефіцієнта перетворення T до зміни параметрів УПН – $S_{\alpha_i}^T$.

Мета роботи

Мета роботи: узагальнити отримані результати по T і $S_{\alpha_i}^T$ для опису N-каскадного з'єднання багатопараметричних УПН, а також знайти аналітичні залежності для перетвореної провідності $Y_{вих.N}$ і максимально-досяжного стійкого коефіцієнта передачі $K_{ms.N}$ таких УПН.

Розробка математичної моделі

У якості граничних умов вважаємо: УПН реалізується на базі квазілінійних активних N-полюсників, які описуються у-матрицею провідності; кожний каскад багатопараметричного УПН є двохпараметричним заземленим УПН; N-каскадне з'єднання таких багатопараметричних УПН може бути представлене у вигляді узагальної структурної схеми (рис. 2.), яка не залежить від фізичного механізму роботи активних приладів.

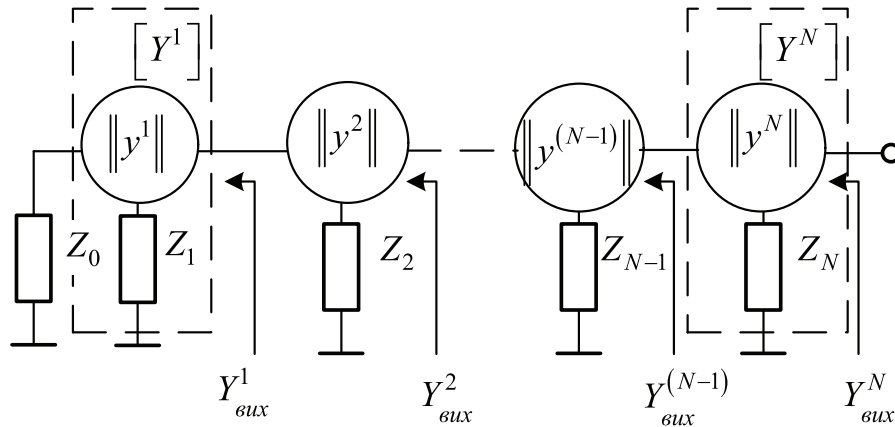


Рисунок 2 – N-каскадне з'єднання багатопараметричних УПН

Кожний каскад такого з'єднання можна описати $[Y^i]$ – матрицею, залежною від параметрів $[y^i]$ – матриці активного чотириполюсника і перетворюваних імітансів $Z_{(i-1)}$ і Z_i , використовуючи співвідношення [2]

$$\begin{aligned} Y_{11}^i &= (y_{11}^i + Z_i \Delta y_i) / K_i; & Y_{12}^i &= (y_{12}^i - Z_i \Delta y_i) / K_i; \\ Y_{22}^i &= (y_{22}^i + Z_i \Delta y_i) / K_i; & Y_{21}^i &= (y_{21}^i - Z_i \Delta y_i) / K_i, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\Delta y_i = y_{11}^i y_{22}^i - y_{12}^i y_{21}^i$; $K_i = 1 + Z_i \sum y_i$;
 $\sum y_i = y_{11}^i + y_{12}^i + y_{21}^i + y_{22}^i$; $i = 1, 2, \dots, N$,
 N – кількість каскадів.

На підставі (1), перетворена провідність $Y_{вих.N}$ N-каскадного з'єднання багатопараметричного УПН дорівнює

$$Y_{вих.N} = Y_{22}^N - \frac{Y_{12}^N Y_{21}^N}{Y_{11}^N + Y_{вих.(N-1)}}. \quad (2)$$

При цьому,

$$Y_{вих.1} = Y_{22}^1 - \frac{Y_{12}^1 Y_{21}^1}{Y_{11}^1 + 1/Z_0}. \quad (3)$$

Таким чином, (2) описує залежність перетвореної провідності багатокаскадного УПН як від кількості каскадів N, так і від значень перетворюваних опорів (Z_0, \dots, Z_N) і від параметрів окремих каскадів $[y^i]$.

Для визначення коефіцієнта перетворення N-каскадного УПН знаходимо його результуючу ланцюгову $[ABCD]_N$ -матрицю

$$[ABCD]_N = \prod_{i=1}^N [A_i B_i C_i D_i]_i,$$

де $A_i = -\frac{y_{22}^i}{y_{12}^i}$; $B_i = \frac{1}{y_{21}^i}$; $C_i = -\frac{\Delta y_i}{y_{21}^i}$; $D_i = -\frac{y_{11}^i}{y_{21}^i}$, $\Delta y_i = y_{11}^i y_{22}^i - y_{12}^i y_{21}^i$.

З метою спрощення розрахунків і подальшого аналізу, розглянемо ряд характерних варіантів, коли:

1. Під коефіцієнтом перетворення N -каскадного УПП_N будемо розуміти величину залежності перетвореної провідності $Y_{вих}^N$ від перетворюваної провідності $y_0 = 1/Z_0$, при фіксованих значеннях $Z_i - const$.

2. Під коефіцієнтом перетворення окремого каскаду будемо розуміти величину залежності перетвореної провідності $Y_{вих}^i$ від перетворюваної провідності $Y_{вих}^{i-1}$ при $y_i = 1/Z_i - const$.

3. В залежності від значень $[y^i]$ - параметрів кожного каскаду і перетворюваного опору Z_i , кожний каскад має властивості конвертора або інвертора провідності.

З врахуванням цих обмежень, якщо всі каскади мають властивості конверторів провідності, результуюча $[ABCD]$ - матриця УПП_N має вигляд [1]

$$[ABCD]_N^K = \begin{bmatrix} \prod_{i=1}^N A_i & 0 \\ 0 & \prod_{i=1}^N D_i \end{bmatrix},$$

з якої виходить, що УПП_N, незалежно від кількості каскадів, також має властивість конвертора імітансу з коефіцієнтом конверсії

$$T_{KN} = \prod_{i=1}^N A_i / \prod_{i=1}^N D_i = \prod_{i=1}^N T_{Ki}. \quad (4)$$

Якщо всі утворюючі каскади мають властивості інверторів імітансу, то $[ABCD]$ - матриця такого каскаду залежатиме від парності кількості каскадів.

Для парної кількості N_χ каскадів

$$[ABCD]_{N_\chi}^K = \begin{bmatrix} \prod_{\chi=1}^{N_\psi-1} B_{i\psi} \prod_{\chi=2}^{N_\psi} C_{i\chi} & 0 \\ 0 & \prod_{\psi=2}^{N_\psi} B_{i\psi} \prod_{\chi=1}^{N_\psi-1} C_{i\chi} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

що відповідає матриці конвертора імітансу з коефіцієнтом конверсії

$$T_{K\psi} = \prod_{\chi=1}^{N_\psi-1} T_{I\chi} / \prod_{\psi=2}^{N_\psi} T_{I\psi}, \quad (6)$$

де $\chi = 1, 3, 5, \dots, (N_\psi - 1)$; $\psi = 2, 4, 6, \dots, N_\psi$; $T_{I\psi}$, $T_{I\chi}$ - коефіцієнти інверсії утворюючих каскадів з парними і непарними номерами.

Для непарної кількості N_χ каскадів результуюча $[ABCD]$ - матриця

$$[ABCD]_{N_\chi}^I = \begin{bmatrix} 0 & \prod_{\chi=2}^{N_\chi} B_\chi \prod_{\psi=1}^{N_\chi-1} C_\psi \\ \prod_{\psi=1}^{N_\chi-1} B_\psi \prod_{\chi=2}^{N_\chi} C_\chi & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

відповідає інвертору імітансу з коефіцієнтом інверсії

$$T_{I\chi} = \prod_{\chi=1}^{N_{\chi}} T_{I\chi} / \prod_{\psi=2}^{N_{\psi}-1} T_{I\psi}. \quad (8)$$

Таким чином, в N-каскадних багатопараметричних УПП_N, також як і в однопараметричних [1], є можливість здійснювати операції множення (4) і ділення (8) коефіцієнтів перетворення, а також синтезувати за допомогою інверторів нові конвертори імітансу (6).

Для практичного використання N-каскадних багатопараметричних УПП_N є актуальним питання чутливості результуючого коефіцієнта перетворення імітансу до зміни його параметра α_i .

З урахуванням вище зроблених припущень, на підставі (4) знаходимо $S_{\alpha_i}^{TKN} = \sum_{i=1}^N S_{\alpha_i}^{TKi}$, тобто відбувається збільшення чутливості зі зростанням кількості каскадів N . Для більшості використань цей факт є негативним. Але, якщо у якості перетворюваних опорів $Z_1 \div Z_N$ використовуються первинні вимірювальні перетворювачі (ПВП), це надає можливість реалізувати генераторні датчики з підвищеною чутливістю.

При використанні парної кількості N_{ψ} інверторів імітансу чутливість коефіцієнта конверсії $T_{K\psi}$ утвореного конвертора імітансу на підставі (6) буде дорівнювати

$$S_{\alpha_i}^{TK\psi} = \sum_{\chi=1}^{N_{\psi}-1} S_{\alpha_i}^{T_{I\chi}} - \sum_{\psi=2}^{N_{\psi}} S_{\alpha_i}^{T_{I\psi}}. \quad (9)$$

З (9) витікає, що при використанні ідентичних каскадів, потенційно можна досягти нульової чутливості коефіцієнта конверсії до зміни α_i . Це вказує на безперспективність такого рішення при реалізації керованих інформаційних пристроїв (ІП), але відкриває широкі можливості для підвищення стабільності частотно-вибіркових ІП.

При непарній кількості каскадів N_{χ} інверторів, чутливість результуючого коефіцієнта інверсії дорівнює

$$S_{\alpha_i}^{T_{I\chi}} = \sum_{\chi=1}^{N_{\chi}} S_{\alpha_i}^{T_{I\chi}} - \sum_{\psi=2}^{N_{\chi}-1} S_{\alpha_i}^{T_{I\psi}}. \quad (10)$$

З (10) витікає, що при використанні ідентичних каскадів $S_{\alpha_i}^{T_{I\chi}} = S_{\alpha_i}^{T_{Ii}}$, тобто дорівнює чутливості одного каскаду.

При каскадному включенні чотирьохполюсників результуючий максимально-досяжний коефіцієнт підсилення на межі стійкості дорівнює [2]

$$K_{ms.N} = \prod_{i=1}^N K_{msi},$$

$$\text{де } K_{msi} = \left| (\Delta[ABCD])^{-1} \right| = \left| \frac{Y_{21i}}{Y_{12i}} \right|.$$

У випадку каскадування інверторів імітансу знаходимо

$$K_{ms.N}^K = \left(\prod_{i=1}^N A_i D_i \right)^{-2} = \left[\prod_{i=1}^N (Y_{22}^i Y_{11}^i) / Y_{21} \right]^{-2}. \quad (11)$$

При каскадному включенні парної кількості інверторів, на підставі (5), знаходимо

$$K_{ms.N\psi}^K = \left| \prod_{\chi=1}^{N_\psi-1} B_\chi C_\chi \prod_{\psi=2}^{N_\psi} C_\psi B_\psi \right|^{-1} \quad (12)$$

При каскадному включенні непарної кількості інверторів, на підставі (7), знаходимо

$$K_{ms.\chi}^K = \left| \prod_{\psi=2}^{N_\chi-1} B_\psi C_\psi \prod_{\chi=1}^{N_\chi} C_\chi B_\chi \right|^{-1} \quad (13)$$

Визначення залежності інваріантного коефіцієнта стійкості багатокаскадного УПН від стійкості окремих каскадів являє собою неоднозначну задачу, що її рішення немає достатнього практичного інтересу. Для оцінки їх стійкості достатньо скористатися визначенням загального запасу стійкості

$$K_{y.N} = \frac{2 \operatorname{Re} Y_{11N} \operatorname{Re} Y_{22N} - \operatorname{Re} Y_{12N} Y_{21N}}{|Y_{12N} Y_{21N}|} \quad (14)$$

Отримана система рівнянь (1-14) утворює математичну модель N-каскадного з'єднання багатопараметричних УПН, яка є достатньою для проектування більшості відомих інформаційних пристроїв на їх основі.

Перевірка коректності моделі

З метою перевірки коректності моделі обрані її параметри: $Z_{вих} = 1/Y_{вих}$ і K_{ms} , вимірювання яких можливе з найбільшою точністю і простотою за методиками, описаними в [3]. Дослідження трьохкаскадного УПН з навантаженнями $Z_0 = Z_1 = Z_2 = Z_3$ на базі польового транзистора 3ПЗ21, розрахункові та експериментальні значення параметрів якого наведені на рис. 3., 4., показали, що в діапазоні частот 1–8ГГц розрахункові та експериментальні значення $K_{ms.N}$ відрізняються не більше, ніж на 10%.

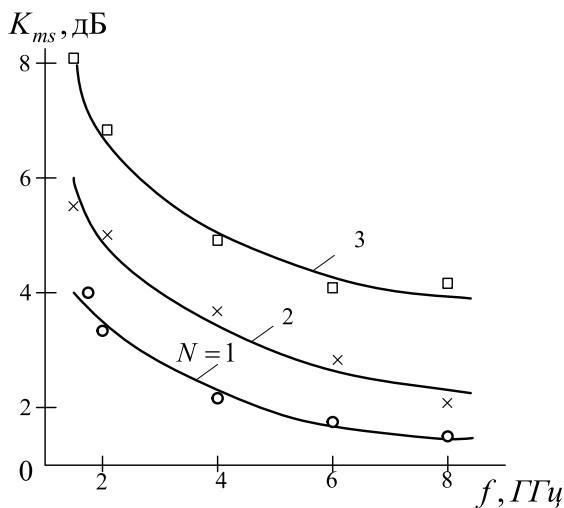


Рисунок 3 – Розрахункові (—) та експериментальні (○, ×, □) залежності K_{ms} для трьохкаскадного багатопараметричного УПН

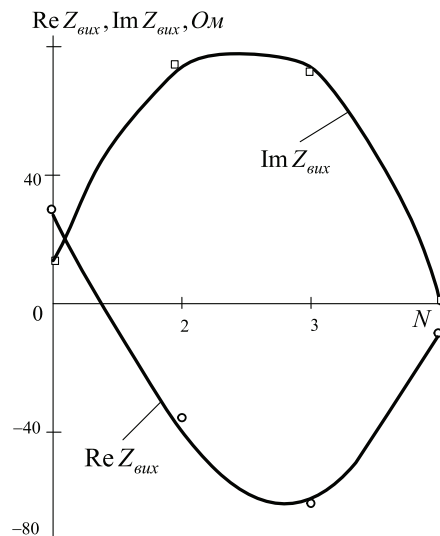


Рисунок 4 – Розрахункові (—) та експериментальні (○, □) залежності перетвореного імпедансу УПН від кількості каскадів N

Характер зміни перетвореного імпедансу $Z_{вих}$ при зміні кількості каскадів N співпадає з експериментальними результатами, що підтверджує правильність розробленої моделі.

Висновки

1. Розроблена математична модель N-каскадного з'єднання багатопараметричних УПН дозволяє оцінити залежність перетвореного імітансу $Y_{вих}$, коефіцієнтів перетворення T , чутливості коефіцієнтів перетворення, запасу стійкості і максимально-досяжного коефіцієнта підсилення УПН на межі стійкості в залежності від параметрів окремих каскадів, перетворюваних імітансів Z_i та кількості каскадів N.

2. Аналіз розробленої математичної моделі показав можливість реалізації на основі УПН як інверторів, так і конверторів імітансу з керуванням величиною чутливості S_{α}^T в залежності від кількості і параметрів каскадів.

Список літератури

1. Филинюк Н. А. Активные СВЧ фильтры на транзисторах / Н. А. Филинюк. – М.: Радио и связь, 1987. – 112 с.

2. Філінюк М.А. Інформаційні присторої на основі потенційно-нестійких багатоелектродних напівпровідникових структур Шотткі: монографія. / М.А. Філінюк, О.М. Куземко, Л.Б. Ліщинська. – Вінниця: ВНТУ, 2009. – 274 с. – ISBN 978-966-641-332-4

3. Філінюк М.А. Метрологічні основи негatronіки / М.А. Філінюк, Д.В. Гаврилов. – Вінниця: УНІВЕРСУМ, 2006 - 188 с. – ISBN 966-641-168-7

Ліщинська Людмила Броніславівна – к.т.н., доцент, здобувач ВНТУ, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, L_Fill@mail.ru

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ

UDC 519.832.4

V. V. ROMANUKE

A THEOREM ON PLAYING THE STRICTLY CONVEX-CONCAVE CONTINUOUS ANTAGONISTIC GAME WITH THE SINGLE POSITIVE FIRST PLAYER COEFFICIENT AT ITS PURE STRATEGY IN THE KERNEL

Abstract: There has been proved the theorem on the pure strategies solution of the strictly convex-concave continuous antagonistic game, which kernel has the five nonzero parameters and the arbitrary constant. The solution is of the six different forms.

Анотація: Доведено теорему щодо розв'язку у чистих стратегіях строго опукло-вогнутої неперервної антагоністичної гри, чис ядро має п'ять ненульових параметрів і довільну постійну. Розв'язок складається із шести різних форм.

Аннотация: Доказано теорему касательно решения в чистых стратегиях строго выпукло-вогнутой непрерывной антагонистической игры, чье ядро имеет пять ненулевых параметров и произвольную постоянную. Решение состоит из шести различных форм.

Key words: pure strategies solution, convex-concave game, fair competition.

The problem decomposition and the paper investigation assignment

The strictly convex-concave continuous antagonistic game is an impartially appropriate and trustworthy mathematical model of some competitive activity socio-economic processes and events, attaching technical processes of machine-building aggregates run-in. The simplest type of the kernel of the strictly convex-concave continuous antagonistic game is the surface

$$K(x, y) = ax^2 + bx + gxy + cy + hy^2 + k, \quad (1)$$

defined on the unit square

$$S_K = X \times Y = [0; 1] \times [0; 1], \quad (2)$$

where $X = [0; 1]$ and $Y = [0; 1]$ are the sets of pure strategies of the first and second players respectively; $x \in X = [0; 1]$ and $y \in Y = [0; 1]$ are the pure strategies of the first and second players respectively; a, b, g, c and h are the real coefficients, and $k \in \mathbb{R}$ is a generalized constant. Such definition allows easily to propagate the consequent statements and conclusions for strictly convex-concave continuous antagonistic games with the kernel, defined generally on a Borelean subset $S_K = X \times Y$ of the space \mathbb{R}^2 [1, 2], and modeling appropriate events [3], objects [1, 3], systems [2, 4, 5], processes [4, 5]. This paper investigation assignment is to prove the solution theorem for the strictly convex-concave continuous antagonistic game with the defined on the unit square (2) kernel (1) by some its nonzero coefficients, which are determined by their signs. In modeling processes of machine-building aggregates run-in time selection, where the first player is a stochastic unexpectedness, and the second is the run-in time (interval), it will ensure the reliable fixation of the run-in time.

Specifying the strictly convex-concave continuous antagonistic game and proving the theorem of its whole solution

It is known [6, 7], that if the continuous antagonistic game is strictly convex, then there is the condition

$$\frac{\partial^2 K(x, y)}{\partial y^2} > 0 \quad \forall x \in X \text{ and } \forall y \in Y. \quad (3)$$

Then for the kernel (1) there is the second partial derivative of y

$$\frac{\partial^2 K(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} (ax^2 + bx + gxy + cy + hy^2 + k) = \frac{\partial}{\partial y} (gx + c + 2hy) = 2h, \quad (4)$$

whence by the condition (3) here is $\frac{\partial^2 K(x, y)}{\partial y^2} = 2h > 0$ and the coefficient $h > 0$. On the other part, if

the continuous antagonistic game is strictly concave, then there is the condition

$$\frac{\partial^2 K(x, y)}{\partial x^2} < 0 \quad \forall x \in X \text{ and } \forall y \in Y. \quad (5)$$

The second partial derivative of x for the kernel (1) is

$$\frac{\partial^2 K(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (ax^2 + bx + gxy + cy + hy^2 + k) = \frac{\partial}{\partial x} (2ax + b + gy) = 2a, \quad (6)$$

whence by the condition (5) here is $\frac{\partial^2 K(x, y)}{\partial x^2} = 2a < 0$ and the coefficient $a < 0$. Consequently, there remain the coefficients b , g and c to be designated. Here may lay them down [8] as $b > 0$, $g < 0$, $c < 0$, that is the only positive first player coefficient is at its pure strategy x in the kernel (1).

For further acting, may the set $X_{\text{opt}} \subset X = [0; 1]$ be the optimal strategies set of the first player, and the set $Y_{\text{opt}} \subset Y = [0; 1]$ be the optimal strategies set of the second player in the specified game. In the pure strategies the optimal game solution [9, 10] will be stated as the set

$$\mathcal{R} = \{X_{\text{opt}}, Y_{\text{opt}}, V_{\text{opt}}\} \quad (7)$$

by the optimal game value V_{opt} . Then there is the theorem.

Theorem for the specified game solution

In the strictly convex-concave continuous antagonistic game with the kernel (1) by the parameters $a < 0$, $b > 0$, $g < 0$, $c < 0$, $h > 0$, and $k \in \mathbb{R}$, each of the players has the single optimal strategy, being the pure, where the number of the unique solutions equals to 6, and the pure strategy $y = 0$ of the second player must not be its optimal strategy.

Proof

As $a < 0$ then the parabola (1) being the function of the variable x has the global maximum point x_{max} , which is the root of the equation [8]

$$\frac{\partial}{\partial x} K(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (ax^2 + bx + gxy + cy + hy^2 + k) = 2ax + b + gy = 0. \quad (8)$$

Then the point

$$x_{\text{max}} = -\frac{b + gy}{2a} \quad (9)$$

and $x_{\text{max}} \geq 0$ by $b + gy \geq 0$ or $y \leq -\frac{b}{g}$; $x_{\text{max}} \leq 1$ by $b + gy \leq -2a$ or $y \geq -\frac{2a + b}{g}$. So, the global maximum point $x_{\text{max}} \in X = [0; 1]$ if the point $y \in \left[-\frac{2a + b}{g}; -\frac{b}{g}\right]$. Here the left end $-\frac{2a + b}{g} \geq 0$ if $2a + b \geq 0$ and the right end $-\frac{b}{g} \leq 1$ if $b + g \leq 0$.

As the point $x_{\text{max}} \in X = [0; 1]$ then by $y \in \left[-\frac{2a + b}{g}; -\frac{b}{g}\right]$ there is the kernel (1) maximum

$$\begin{aligned} \max_{x \in X} K(x, y) &= \max_{x \in [0; 1]} K(x, y) = K(x_{\text{max}}, y) = K\left(-\frac{b + gy}{2a}, y\right) = \\ &= a \frac{(b + gy)^2}{4a^2} - b \frac{b + gy}{2a} - gy \frac{b + gy}{2a} + cy + hy^2 + k = -\frac{(b + gy)^2}{4a} + cy + hy^2 + k = \\ &= -\frac{b^2}{4a} - \frac{bg}{2a} y + cy - \frac{g^2}{4a} y^2 + hy^2 + k = y^2 \frac{4ah - g^2}{4a} + y \frac{2ac - bg}{2a} - \frac{b^2}{4a} + k, \end{aligned} \quad (10)$$

where on the left end of the proper subsegment of $Y = [0; 1]$

$$K\left(x_{\text{max}}, -\frac{2a + b}{g}\right) = K\left(-\frac{b + gy}{2a}, -\frac{2a + b}{g}\right) = K\left(1, -\frac{2a + b}{g}\right), \quad (11)$$

and on the right end

$$K\left(x_{\text{max}}, -\frac{b}{g}\right) = K\left(-\frac{b + gy}{2a}, -\frac{b}{g}\right) = K\left(0, -\frac{b}{g}\right). \quad (12)$$

As there is the inequality $a + b + gy > 0$ by $y < -\frac{a + b}{g}$ and $-\frac{a + b}{g} \in \left(-\frac{2a + b}{g}; -\frac{b}{g}\right)$ then the maximum of the surface (1) on the unit segment $X = [0; 1]$ of the variable x is

$$\max_{x \in [0; 1]} K(x, y) = \begin{cases} \max \{K(0, y), K(1, y)\} = K(1, y) = a + b + gy + cy + hy^2 + k, y \in \left[0; -\frac{2a+b}{g}\right]; \\ K(x_{\max}, y) = K\left(-\frac{b+gy}{2a}, y\right) = y^2 \frac{4ah-g^2}{4a} + y \frac{2ac-bg}{2a} - \frac{b^2}{4a} + k, y \in \left[-\frac{2a+b}{g}; -\frac{b}{g}\right]; \\ \max \{K(0, y), K(1, y)\} = K(0, y) = cy + hy^2 + k, y \in \left[-\frac{b}{g}; 1\right]. \end{cases} \quad (13)$$

For minimizing the function (13) on the unit segment $Y = [0; 1]$ it is necessary to determine the minima of the three parabolas $K(1, y)$, $K(x_{\max}, y)$ and $K(0, y)$ on the specified in (13) three subsegments of Y . The global minimum $y_{\min}^{(1)}$ of the parabola $K(1, y)$ is the root of the equation

$$\frac{d}{dy} K(1, y) = \frac{d}{dy} (a + b + gy + cy + hy^2 + k) = g + c + 2hy = 0, \quad (14)$$

whence the point

$$y_{\min}^{(1)} = -\frac{g+c}{2h}. \quad (15)$$

As $g+c < 0$ then the point $y_{\min}^{(1)} > 0$ and $y_{\min}^{(1)} < -\frac{2a+b}{g}$ if there is the statement

$$y_{\min}^{(1)} - \left(-\frac{2a+b}{g}\right) = -\frac{g+c}{2h} + \frac{2a+b}{g} = \frac{2h(2a+b) - g(g+c)}{2hg} < 0, \quad (16)$$

whence $y_{\min}^{(1)} \in \left(0; -\frac{2a+b}{g}\right)$ by $2h(2a+b) - g(g+c) > 0$. Mark, that the value of the parabola $K(1, y)$

in the point $y_{\min}^{(1)}$ is

$$\begin{aligned} K(1, y_{\min}^{(1)}) &= K\left(1, -\frac{g+c}{2h}\right) = a + b + g\left(-\frac{g+c}{2h}\right) + c\left(-\frac{g+c}{2h}\right) + h\left(-\frac{g+c}{2h}\right)^2 + k = a + b + \\ &+ (g+c)\left(-\frac{g+c}{2h}\right) + h\left(-\frac{g+c}{2h}\right)^2 + k = a + b - \frac{(g+c)^2}{2h} + \frac{(g+c)^2}{4h} + k = a + b - \frac{(g+c)^2}{4h} + k. \end{aligned} \quad (17)$$

Turning to the parabola $K(x_{\max}, y)$, it is seen that the coefficient $\frac{4ah-g^2}{4a} > 0$ points at that the parabola $K(x_{\max}, y)$ has the global minimum y_{\min} , that is the root of the equation

$$\frac{d}{dy} K(x_{\max}, y) = \frac{d}{dy} \left(y^2 \frac{4ah-g^2}{4a} + y \frac{2ac-bg}{2a} - \frac{b^2}{4a} + k\right) = y \frac{4ah-g^2}{2a} + \frac{2ac-bg}{2a} = 0, \quad (18)$$

whence the point

$$y_{\min} = \frac{bg-2ac}{4ah-g^2} \quad (19)$$

and the function (10) in this point is

$$\begin{aligned} K(x_{\max}, y_{\min}) &= K\left(-\frac{b+gy}{2a}, \frac{bg-2ac}{4ah-g^2}\right) = \left(\frac{bg-2ac}{4ah-g^2}\right)^2 \frac{4ah-g^2}{4a} + \frac{bg-2ac}{4ah-g^2} \frac{2ac-bg}{2a} - \frac{b^2}{4a} + k = \\ &= \frac{(bg-2ac)^2}{4a(4ah-g^2)} - \frac{(bg-2ac)^2}{2a(4ah-g^2)} - \frac{b^2}{4a} + k = -\frac{(bg-2ac)^2}{4a(4ah-g^2)} - \frac{b^2}{4a} + k = \\ &= \frac{b^2g^2 - 4acbg + 4a^2c^2 - b^2g^2 + 4ab^2h}{4a(g^2 - 4ah)} + k = \frac{-cbg + ac^2 + b^2h}{g^2 - 4ah} + k = \frac{c(ac-bg) + b^2h}{g^2 - 4ah} + k. \end{aligned} \quad (20)$$

Obviously, that by the initial conditions there are the inequalities $bg-2ac < 0$ and $4ah-g^2 < 0$, whence the point $y_{\min} = \frac{bg-2ac}{4ah-g^2} > 0$. The difference between the point (19) and the left end of the subsegment

$\left[-\frac{2a+b}{g}; -\frac{b}{g}\right]$ is

$$\begin{aligned}
y_{\min} - \left(-\frac{2a+b}{g}\right) &= \frac{bg-2ac}{4ah-g^2} + \frac{2a+b}{g} = \frac{bg^2-2acg+(4ah-g^2)(2a+b)}{g(4ah-g^2)} = \\
&= \frac{2a(2bh-cg)+2a(4ah-g^2)}{g(4ah-g^2)} = \frac{2a}{g(4ah-g^2)} [2h(2a+b)-g(g+c)]. \quad (21)
\end{aligned}$$

So, $y_{\min} > -\frac{2a+b}{g}$ by $2h(2a+b)-g(g+c) < 0$. And as the difference

$$y_{\min} - \left(-\frac{b}{g}\right) = \frac{bg-2ac}{4ah-g^2} + \frac{b}{g} = \frac{bg^2-2acg+4ahb-bg^2}{g(4ah-g^2)} = \frac{2a}{g(4ah-g^2)} (2hb-cg) \quad (22)$$

then $y_{\min} < -\frac{b}{g}$ by $2hb-cg > 0$.

The global minimum $y_{\min}^{(0)}$ of the parabola $K(0, y)$ is the root of the equation

$$\frac{d}{dy} K(0, y) = \frac{d}{dy} (cy + hy^2 + k) = c + 2hy = 0, \quad (23)$$

whence the point

$$y_{\min}^{(0)} = -\frac{c}{2h}. \quad (24)$$

Certainly that $-\frac{c}{2h} > 0$ and as the difference

$$y_{\min}^{(0)} - \left(-\frac{b}{g}\right) = -\frac{c}{2h} + \frac{b}{g} = \frac{2hb-cg}{2hg} \quad (25)$$

then $y_{\min}^{(0)} > -\frac{b}{g}$ by $2hb-cg < 0$; and $y_{\min}^{(0)} \leq 1$ by $c+2h \geq 0$.

For further proving there should be considered all the cases with the inequalities, defining every saddle point.

Case 1. $b+g \leq 0$, $2a+b \geq 0$, $2h(2a+b)-g(g+c) > 0$

Here is the point $y_{\min}^{(1)} \in \left(0; -\frac{2a+b}{g}\right)$. The difference between the points $y_{\min}^{(1)}$ and $y_{\min}^{(0)}$ is

$$y_{\min}^{(1)} - y_{\min}^{(0)} = -\frac{g+c}{2h} - \left(-\frac{c}{2h}\right) = -\frac{g}{2h} > 0. \quad (26)$$

As the point $y_{\min}^{(1)} < -\frac{2a+b}{g}$ then $y_{\min}^{(0)} < -\frac{2a+b}{g}$ and $y_{\min}^{(0)} < -\frac{b}{g}$. Also here the point $y_{\min} < -\frac{2a+b}{g}$.

Applying the double parabolic inequalities

$$K\left(0, y_{\min}^{(0)}\right) < K\left(0, -\frac{b}{g}\right) < K(0, 1), \quad (27)$$

$$K(x_{\max}, y_{\min}) < K\left(x_{\max}, -\frac{2a+b}{g}\right) < K\left(x_{\max}, -\frac{b}{g}\right) = K\left(0, -\frac{b}{g}\right), \quad (28)$$

$$\left\{ K(1, 0) > K\left(1, y_{\min}^{(1)}\right), K\left(1, y_{\min}^{(1)}\right) < K\left(1, -\frac{2a+b}{g}\right) = K\left(x_{\max}, -\frac{2a+b}{g}\right) \right\}, \quad (29)$$

the minimum of the function (13) on the segment Y

$$\begin{aligned}
\min_{y \in [0; 1]} \max_{x \in [0; 1]} K(x, y) &= \min \left\{ \min_{y \in \left[0; -\frac{2a+b}{g}\right]} K(1, y), \min_{y \in \left[-\frac{2a+b}{g}; -\frac{b}{g}\right]} K(x_{\max}, y), \min_{y \in \left[-\frac{b}{g}; 1\right]} K(0, y) \right\} = \\
&= \min \left\{ K\left(1, y_{\min}^{(1)}\right), \min \left\{ K\left(x_{\max}, -\frac{2a+b}{g}\right), K\left(x_{\max}, -\frac{b}{g}\right) \right\}, \min \left\{ K\left(0, -\frac{b}{g}\right), K(0, 1) \right\} \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \min \left\{ K\left(1, y_{\min}^{(1)}\right), K\left(x_{\max}, -\frac{2a+b}{g}\right), K\left(0, -\frac{b}{g}\right) \right\} = \\
&= \min \left\{ K\left(1, y_{\min}^{(1)}\right), K\left(x_{\max}, -\frac{2a+b}{g}\right), K\left(x_{\max}, -\frac{b}{g}\right) \right\} = \\
&= \min \left\{ K\left(1, y_{\min}^{(1)}\right), K\left(x_{\max}, -\frac{2a+b}{g}\right) \right\} = K\left(1, y_{\min}^{(1)}\right) = a+b - \frac{(g+c)^2}{4h} + k = V_{\text{opt}}
\end{aligned} \quad (30)$$

is reached on the optimal strategies set of the second player

$$Y_{\text{opt}} = \left\{ y_{\min}^{(1)} \right\} = \left\{ -\frac{g+c}{2h} \right\} = \left\{ y_{\text{opt}} \right\}. \quad (31)$$

The optimal strategies set X_{opt} of the first player is determined by the roots x_1 and x_2 of the quadratic equation [6, 7]

$$V_{\text{opt}} = K(x, y_{\text{opt}}). \quad (32)$$

In the case being investigated the corresponding equation (32) is

$$\begin{aligned}
V_{\text{opt}} = K\left(1, -\frac{g+c}{2h}\right) &= a+b - \frac{(g+c)^2}{4h} + k = ax^2 + bx + gx\left(-\frac{g+c}{2h}\right) + c\left(-\frac{g+c}{2h}\right) + h\left(-\frac{g+c}{2h}\right)^2 + \\
+k &= ax^2 + x\left[\frac{2bh-g(g+c)}{2h}\right] - c\frac{g+c}{2h} + \frac{(g+c)^2}{4h} + k = K\left(x, -\frac{g+c}{2h}\right) = K(x, y_{\text{opt}});
\end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
&ax^2 + x\left[\frac{2bh-g(g+c)}{2h}\right] - c\frac{g+c}{2h} + \frac{(g+c)^2}{4h} - a - b + \frac{(g+c)^2}{4h} = \\
&= ax^2 + x\left[\frac{2bh-g(g+c)}{2h}\right] + \frac{g(g+c)-2h(a+b)}{2h} = \\
&= a\left(x^2 + x\left[\frac{2bh-g(g+c)}{2ah}\right] + \frac{g(g+c)-2h(a+b)}{2ah}\right) = a(x-1)\left(x - \frac{g(g+c)-2h(a+b)}{2ah}\right) = 0.
\end{aligned} \quad (34)$$

It is seen from the statement (34) that the roots of the equation (33) are $x_1=1$ and $x_2 = \frac{g(g+c)-2h(a+b)}{2ah}$. But as $2h(a+b)-g(g+c) > -2ha > 0$ then $\frac{g(g+c)-2h(a+b)}{2ah} > 1$ and the optimal strategies set of the first player is

$$X_{\text{opt}} = \{x_1\} = \{1\}. \quad (35)$$

Accordingly the investigated case game solution is

$$\mathcal{R} = \left\{ \{1\}, \left\{ -\frac{g+c}{2h} \right\}, a+b - \frac{(g+c)^2}{4h} + k \right\}. \quad (36)$$

The next case must be at $2h(2a+b)-g(g+c) \leq 0$, where $y_{\min}^{(1)} \geq -\frac{2a+b}{g}$ and $y_{\min} \geq -\frac{2a+b}{g}$. Setting on the inequality $2hb-cg > 0$ there due to (22) is the point $y_{\min} < -\frac{b}{g}$. And due to (25) there is the point

$$y_{\min}^{(0)} < -\frac{b}{g}.$$

Case 2. $b+g \leq 0$, $2a+b \geq 0$, $2h(2a+b)-g(g+c) \leq 0$, $2hb-cg > 0$

Having the point $y_{\min} \in \left[-\frac{2a+b}{g}; -\frac{b}{g}\right)$, the corresponding double parabolic inequalities (27) and

$$\left\{ K\left(x_{\max}, -\frac{2a+b}{g}\right) \geq K(x_{\max}, y_{\min}), K(x_{\max}, y_{\min}) < K\left(x_{\max}, -\frac{b}{g}\right) = K\left(0, -\frac{b}{g}\right) \right\}, \quad (37)$$

$$K(1, 0) > K\left(1, -\frac{2a+b}{g}\right) = K\left(x_{\max}, -\frac{2a+b}{g}\right) \geq K\left(1, y_{\min}^{(1)}\right), \quad (38)$$

the minimum of the function (13) on the segment Y

$$\begin{aligned}
\min_{y \in [0; 1]} \max_{x \in [0; 1]} K(x, y) &= \min \left\{ \min_{y \in \left[0; \frac{2a+b}{g}\right]} K(1, y), \min_{y \in \left[\frac{2a+b}{g}; \frac{b}{g}\right]} K(x_{\max}, y), \min_{y \in \left[\frac{b}{g}; 1\right]} K(0, y) \right\} = \\
&= \min \left\{ \min \left\{ K(1, 0), K\left(1, -\frac{2a+b}{g}\right) \right\}, K(x_{\max}, y_{\min}), \min \left\{ K\left(0, -\frac{b}{g}\right), K(0, 1) \right\} \right\} = \\
&= \min \left\{ K\left(1, -\frac{2a+b}{g}\right), K(x_{\max}, y_{\min}), K\left(0, -\frac{b}{g}\right) \right\} = \\
&= K(x_{\max}, y_{\min}) = K\left(-\frac{b+gy}{2a}, \frac{bg-2ac}{4ah-g^2}\right) = \frac{c(ac-bg)+b^2h}{g^2-4ah} + k = V_{\text{opt}}
\end{aligned} \tag{39}$$

is reached on the optimal strategies set of the second player

$$Y_{\text{opt}} = \{y_{\min}\} = \left\{ \frac{bg-2ac}{4ah-g^2} \right\} = \{y_{\text{opt}}\}. \tag{40}$$

The corresponding equation (32) is

$$\begin{aligned}
V_{\text{opt}} &= K\left(-\frac{b+gy}{2a}, \frac{bg-2ac}{4ah-g^2}\right) = \frac{c(ac-bg)+b^2h}{g^2-4ah} + k = \\
&= ax^2 + bx + gx \frac{bg-2ac}{4ah-g^2} + c \frac{bg-2ac}{4ah-g^2} + h \left(\frac{bg-2ac}{4ah-g^2}\right)^2 + k = K\left(x, \frac{bg-2ac}{4ah-g^2}\right) = K(x, y_{\text{opt}}); \tag{41} \\
&= ax^2 + bx + gx \frac{bg-2ac}{4ah-g^2} + c \frac{bg-2ac}{4ah-g^2} + h \left(\frac{bg-2ac}{4ah-g^2}\right)^2 - \frac{c(ac-bg)+b^2h}{g^2-4ah} = \\
&= ax^2 + x \frac{4abh-bg^2+bg^2-2acg}{4ah-g^2} + \frac{(bcg-2ac^2)(4ah-g^2)+h(bg-2ac)^2}{(4ah-g^2)^2} + \frac{c(ac-bg)+b^2h}{4ah-g^2} = \\
&= ax^2 + x \frac{2a(2bh-cg)}{4ah-g^2} + \frac{4ahbcg-8a^2c^2h-bcg^3+2ac^2g^2+hb^2g^2-4ahbcg+4a^2c^2h}{(4ah-g^2)^2} + \\
&+ \frac{[c(ac-bg)+b^2h](4ah-g^2)}{(4ah-g^2)^2} = ax^2 + x \frac{2a(2bh-cg)}{4ah-g^2} + \frac{-bcg^3+2ac^2g^2+hb^2g^2-4a^2c^2h}{(4ah-g^2)^2} + \\
&+ \frac{4a^2c^2h-4abcgh+4ab^2h^2-ac^2g^2+bcg^3-b^2hg^2}{(4ah-g^2)^2} = \\
&= ax^2 + x \frac{2a(2bh-cg)}{4ah-g^2} + \frac{ac^2g^2-4abcgh+4ab^2h^2}{(4ah-g^2)^2} = ax^2 + x \frac{2a(2bh-cg)}{4ah-g^2} + \\
&+ a \frac{(cg-2bh)^2}{(4ah-g^2)^2} = a \left[x^2 + 2x \frac{2bh-cg}{4ah-g^2} + \left(\frac{cg-2bh}{4ah-g^2}\right)^2 \right] = a \left(x + \frac{2bh-cg}{4ah-g^2} \right)^2 = 0. \tag{42}
\end{aligned}$$

Essentially, that with the statement (42) the single root of the equation (41) is $x_1 = x_2 = \frac{cg-2bh}{4ah-g^2}$. As

$2bh-cg > 0$ then $\frac{cg-2bh}{4ah-g^2} > 0$, and inasmuch $2h(2a+b)-g(g+c) \leq 0$ then $4ah-g^2 \leq cg-2bh$, whence the value $\frac{cg-2bh}{4ah-g^2} \in (0; 1]$. So, the optimal strategies set of the first player here is

$$X_{\text{opt}} = \{x_1\} = \{x_2\} = \left\{ \frac{cg-2bh}{4ah-g^2} \right\}. \tag{43}$$

Accordingly the investigated case game solution is

$$\mathcal{R} = \left\{ \left\{ \frac{cg - 2bh}{4ah - g^2} \right\}, \left\{ \frac{bg - 2ac}{4ah - g^2} \right\}, \frac{c(ac - bg) + b^2h}{g^2 - 4ah} + k \right\}. \quad (44)$$

The subsequent case is to be investigated by $2hb - cg \leq 0$, when still $y_{\min}^{(1)} \geq -\frac{2a+b}{g}$ and the point $y_{\min} \geq -\frac{b}{g}$. Besides, due to (25) there is the point $y_{\min}^{(0)} \geq -\frac{b}{g}$, where it should be attached the inequality $c + 2h \geq 0$, jointly giving the point $y_{\min}^{(0)} \in \left[-\frac{b}{g}; 1 \right]$.

Case 3. $b + g \leq 0$, $2a + b \geq 0$, $2h(2a + b) - g(g + c) \leq 0$, $2hb - cg \leq 0$, $c + 2h \geq 0$

Here are the double parabolic inequalities

$$\left\{ K\left(0, -\frac{b}{g}\right) \geq K\left(0, y_{\min}^{(0)}\right), K\left(0, y_{\min}^{(0)}\right) \leq K(0, 1) \right\}, \quad (45)$$

$$K\left(x_{\max}, -\frac{2a+b}{g}\right) > K\left(x_{\max}, -\frac{b}{g}\right) = K\left(0, -\frac{b}{g}\right) \geq K\left(x_{\max}, y_{\min}\right), \quad (46)$$

and (38). Then the minimum of the function (13) on the segment Y

$$\begin{aligned} \min_{y \in [0; 1]} \max_{x \in [0; 1]} K(x, y) &= \min \left\{ \min_{y \in \left[0; -\frac{2a+b}{g}\right]} K(1, y), \min_{y \in \left[-\frac{2a+b}{g}; -\frac{b}{g}\right]} K(x_{\max}, y), \min_{y \in \left[-\frac{b}{g}; 1\right]} K(0, y) \right\} = \\ &= \min \left\{ \min \left\{ K(1, 0), K\left(1, -\frac{2a+b}{g}\right) \right\}, \min \left\{ K\left(x_{\max}, -\frac{2a+b}{g}\right), K\left(x_{\max}, -\frac{b}{g}\right) \right\}, K\left(0, y_{\min}^{(0)}\right) \right\} = \\ &= \min \left\{ K\left(1, -\frac{2a+b}{g}\right), K\left(x_{\max}, -\frac{b}{g}\right), K\left(0, y_{\min}^{(0)}\right) \right\} = \\ &= \min \left\{ K\left(x_{\max}, -\frac{2a+b}{g}\right), K\left(x_{\max}, -\frac{b}{g}\right), K\left(0, y_{\min}^{(0)}\right) \right\} = \\ &= \min \left\{ K\left(x_{\max}, -\frac{b}{g}\right), K\left(0, y_{\min}^{(0)}\right) \right\} = \min \left\{ K\left(0, -\frac{b}{g}\right), K\left(0, y_{\min}^{(0)}\right) \right\} = K\left(0, y_{\min}^{(0)}\right) = \\ &= K\left(0, -\frac{c}{2h}\right) = c\left(-\frac{c}{2h}\right) + h\left(-\frac{c}{2h}\right)^2 + k = k - \frac{c^2}{4h} = V_{\text{opt}} \end{aligned} \quad (47)$$

is reached on the optimal strategies set of the second player

$$Y_{\text{opt}} = \left\{ y_{\min}^{(0)} \right\} = \left\{ -\frac{c}{2h} \right\} = \left\{ y_{\text{opt}} \right\}. \quad (48)$$

The corresponding equation (32) is

$$\begin{aligned} V_{\text{opt}} &= K\left(0, -\frac{c}{2h}\right) = k - \frac{c^2}{4h} = ax^2 + bx + gx\left(-\frac{c}{2h}\right) + c\left(-\frac{c}{2h}\right) + h\left(-\frac{c}{2h}\right)^2 + k = \\ &= ax^2 + bx + gx\left(-\frac{c}{2h}\right) + k - \frac{c^2}{4h} = x\left(ax + b - \frac{cg}{2h}\right) + k - \frac{c^2}{4h} = \\ &= x\left(ax + \frac{2hb - cg}{2h}\right) + k - \frac{c^2}{4h} = K\left(x, -\frac{c}{2h}\right) = K\left(x, y_{\text{opt}}\right). \end{aligned} \quad (49)$$

From the equation (49) get the equation

$$x\left(ax + \frac{2hb - cg}{2h}\right) = x\left(x + \frac{2hb - cg}{2ah}\right) = 0, \quad (50)$$

whence the roots of the equation (49) are $x_1 = 0$ and $x_2 = \frac{cg - 2hb}{2ah}$. By the initial condition

$2hb - cg \leq 0$ it means that $x_2 = \frac{cg - 2hb}{2ah} \leq 0$. So, the optimal strategies set of the first player is

$$X_{\text{opt}} = \{x_1\} = \{0\}. \quad (51)$$

Accordingly this local investigated case game solution is the set

$$\mathcal{R} = \left\{ \{0\}, \left\{ -\frac{c}{2h} \right\}, k - \frac{c^2}{4h} \right\}. \quad (52)$$

Case 4. $b + g \leq 0$, $2a + b \geq 0$, $2h(2a + b) - g(g + c) \leq 0$, $2hb - cg \leq 0$, $c + 2h < 0$

There are the points $y_{\min}^{(1)} \geq -\frac{2a+b}{g}$, $y_{\min} \geq -\frac{b}{g}$, $y_{\min}^{(0)} > 1$, satisfying the double parabolic inequalities

$$K\left(0, -\frac{b}{g}\right) > K(0, 1) > K\left(0, y_{\min}^{(0)}\right), \quad (53)$$

(46) and (38). Then the minimum of the function (13) on the segment Y

$$\begin{aligned} \min_{y \in [0; 1]} \max_{x \in [0; 1]} K(x, y) &= \min \left\{ \min_{y \in \left[0; -\frac{2a+b}{g}\right]} K(1, y), \min_{y \in \left[-\frac{2a+b}{g}; \frac{b}{g}\right]} K(x_{\max}, y), \min_{y \in \left[\frac{b}{g}; 1\right]} K(0, y) \right\} = \\ &= \min \left\{ \min \left\{ K(1, 0), K\left(1, -\frac{2a+b}{g}\right) \right\}, \min \left\{ K\left(x_{\max}, -\frac{2a+b}{g}\right), K\left(x_{\max}, -\frac{b}{g}\right) \right\}, \min \left\{ K\left(0, -\frac{b}{g}\right), K(0, 1) \right\} \right\} = \\ &= \min \left\{ K\left(1, -\frac{2a+b}{g}\right), K\left(x_{\max}, -\frac{b}{g}\right), K(0, 1) \right\} = \\ &= \min \left\{ K\left(x_{\max}, -\frac{2a+b}{g}\right), K\left(x_{\max}, -\frac{b}{g}\right), K(0, 1) \right\} = \\ &= \min \left\{ K\left(x_{\max}, -\frac{b}{g}\right), K(0, 1) \right\} = \min \left\{ K\left(0, -\frac{b}{g}\right), K(0, 1) \right\} = K(0, 1) = c + h + k = V_{\text{opt}} \end{aligned} \quad (54)$$

is reached on the optimal strategies set of the second player

$$Y_{\text{opt}} = \{1\} = \{y_{\text{opt}}\}. \quad (55)$$

The roots of the corresponding equation (32)

$$\begin{aligned} V_{\text{opt}} = K(0, 1) = c + h + k &= ax^2 + bx + gx + c + h + k = \\ &= ax \left(x + \frac{b+g}{a} \right) + c + h + k = K(x, 1) = K(x, y_{\text{opt}}) \end{aligned} \quad (56)$$

are $x_1 = 0$ and $x_2 = -\frac{b+g}{a}$. But $b + g \leq 0$ means $x_2 = -\frac{b+g}{a} \leq 0$, so the optimal strategies set of the first player is (51). Accordingly this local investigated case game solution is the set

$$\mathcal{R} = \left\{ \{0\}, \{1\}, c + h + k \right\}. \quad (57)$$

At this the maximum (13) has been investigated completely. For subsequent investigations there should be set up the condition $2a + b < 0$. Right away the value $-\frac{2a+b}{g} < 0$ and the maximum of the surface (1) on the unit segment $X = [0; 1]$ of the variable x is

$$\max_{x \in [0; 1]} K(x, y) = \begin{cases} K(x_{\max}, y) = K\left(-\frac{b+gy}{2a}, y\right) = y^2 \frac{4ah - g^2}{4a} + y \frac{2ac - bg}{2a} - \frac{b^2}{4a} + k, & y \in \left[0; -\frac{b}{g}\right]; \\ \max \{K(0, y), K(1, y)\} = K(0, y) = cy + hy^2 + k, & y \in \left[-\frac{b}{g}; 1\right]. \end{cases} \quad (58)$$

If to set there up the condition $2hb - cg > 0$, then the statement (22) will give $y_{\min} < -\frac{b}{g}$, and the statement (25) will give $y_{\min}^{(0)} < -\frac{b}{g}$.

Case 5. $b + g \leq 0$, $2a + b < 0$, $2hb - cg > 0$

Here is the point $y_{\min} \in \left(0; -\frac{b}{g}\right)$, giving the corresponding double parabolic inequality

$$\left\{ K(x_{\max}, 0) > K(x_{\max}, y_{\min}), K(x_{\max}, y_{\min}) < K\left(x_{\max}, -\frac{b}{g}\right) = K\left(0, -\frac{b}{g}\right) \right\}. \quad (59)$$

With the double parabolic inequality (27) the minimum of the function (58) on the segment Y

$$\begin{aligned} \min_{y \in [0; 1]} \max_{x \in [0; 1]} K(x, y) &= \min \left\{ \min_{y \in \left[0; -\frac{b}{g}\right]} K(x_{\max}, y), \min_{y \in \left[-\frac{b}{g}; 1\right]} K(0, y) \right\} = \\ &= \min \left\{ K(x_{\max}, y_{\min}), \min \left\{ K\left(0, -\frac{b}{g}\right), K(0, 1) \right\} \right\} = \\ &= \min \left\{ K(x_{\max}, y_{\min}), K\left(0, -\frac{b}{g}\right) \right\} = \min \left\{ K(x_{\max}, y_{\min}), K\left(x_{\max}, -\frac{b}{g}\right) \right\} = \\ &= K(x_{\max}, y_{\min}) = K\left(-\frac{b+gy}{2a}, \frac{bg-2ac}{4ah-g^2}\right) = \frac{c(ac-bg)+b^2h}{g^2-4ah} + k = V_{\text{opt}} \end{aligned} \quad (60)$$

is reached on the optimal strategies set (40) of the second player. The single root $x_1 = x_2 = \frac{cg-2bh}{4ah-g^2}$ of the corresponding equation (41) is determined by the equation (42). As $2hb-cg > 0$ then again $\frac{cg-2bh}{4ah-g^2} > 0$, and inasmuch $2h(2a+b)-g(g+c) < 0$ then $4ah-g^2 < cg-2bh$, whence the value $\frac{cg-2bh}{4ah-g^2} \in (0; 1)$. So, the set (43) is the optimal strategies set of the first player, and the investigated case game solution is the set (44).

Further setting up the inequality $2hb-cg \leq 0$ drives to that the point $y_{\min} \geq -\frac{b}{g}$, but $y_{\min}^{(0)} \in \left[-\frac{b}{g}; 1\right]$ by the inequality $c+2h \geq 0$.

Case 6. $b+g \leq 0$, $2a+b < 0$, $2hb-cg \leq 0$, $c+2h \geq 0$

Here are the point $y_{\min}^{(0)} \in \left[-\frac{b}{g}; 1\right]$ and the point $y_{\min} \geq -\frac{b}{g}$, giving the double parabolic inequalities (45) and

$$K(x_{\max}, 0) > K\left(x_{\max}, -\frac{b}{g}\right) = K\left(0, -\frac{b}{g}\right) \geq K(x_{\max}, y_{\min}). \quad (61)$$

Then the minimum of the function (58) on the segment Y

$$\begin{aligned} \min_{y \in [0; 1]} \max_{x \in [0; 1]} K(x, y) &= \min \left\{ \min_{y \in \left[0; -\frac{b}{g}\right]} K(x_{\max}, y), \min_{y \in \left[-\frac{b}{g}; 1\right]} K(0, y) \right\} = \\ &= \min \left\{ \min \left\{ K(x_{\max}, 0), K\left(x_{\max}, -\frac{b}{g}\right) \right\}, K\left(0, y_{\min}^{(0)}\right) \right\} = \\ &= \min \left\{ K\left(x_{\max}, -\frac{b}{g}\right), K\left(0, y_{\min}^{(0)}\right) \right\} = \min \left\{ K\left(0, -\frac{b}{g}\right), K\left(0, y_{\min}^{(0)}\right) \right\} = \\ &= K\left(0, y_{\min}^{(0)}\right) = K\left(0, -\frac{c}{2h}\right) = k - \frac{c^2}{4h} = V_{\text{opt}} \end{aligned} \quad (62)$$

is reached on the optimal strategies set (48) of the second player. The roots of the corresponding equation (49) are $x_1 = 0$ and $x_2 = \frac{cg-2bh}{2ah} \leq 0$, that is the optimal strategies set of the first player is the set (51).

Accordingly this local investigated case game solution is the set (52).

Case 7. $b+g \leq 0$, $2a+b < 0$, $2hb-cg \leq 0$, $c+2h < 0$

As the point $y_{\min} \geq -\frac{b}{g}$ and the point $y_{\min}^{(0)} > 1$ then respectively with the double parabolic inequalities

(61) and (53) there the segment Y function (58) minimum

$$\begin{aligned} \min_{y \in [0; 1]} \max_{x \in [0; 1]} K(x, y) &= \min \left\{ \min_{y \in [0; -\frac{b}{g}]} K(x_{\max}, y), \min_{y \in [-\frac{b}{g}; 1]} K(0, y) \right\} = \\ &= \min \left\{ \min \left\{ K(x_{\max}, 0), K(x_{\max}, -\frac{b}{g}) \right\}, \min \left\{ K(0, -\frac{b}{g}), K(0, 1) \right\} \right\} = \\ &= \min \left\{ K(x_{\max}, -\frac{b}{g}), K(0, 1) \right\} = \min \left\{ K(0, -\frac{b}{g}), K(0, 1) \right\} = K(0, 1) = c + h + k = V_{\text{opt}} \end{aligned} \quad (63)$$

is reached on the set (55). The roots of the corresponding equation (56) are $x_1 = 0$ and $x_2 = -\frac{b+g}{a} \leq 0$,

that is the optimal strategies set of the first player is (51). Accordingly this local investigated case game solution is the set (57).

At this the maximum (58), or, to be more general, the maximum (13) by sum $b+g \leq 0$, has been investigated completely. For subsequent investigations there should be set up the condition $b+g > 0$. As

$-\frac{b}{g} > 1$ then $x_{\max} \geq 0$ by $y \leq 1$, and if $2a+b \geq 0$ then $x_{\max} \leq 1$ by $y \geq -\frac{2a+b}{g}$. At this the value $-\frac{2a+b}{g} \in [0; 1]$ by $2a+b+g \leq 0$. The inequality $a+b+gy > 0$ by $y < -\frac{a+b}{g}$ means that the maximum of

the surface (1) on the unit segment $X = [0; 1]$ of the variable x is

$$\max_{x \in [0; 1]} K(x, y) = \begin{cases} \max \{K(0, y), K(1, y)\} = K(1, y) = a + b + gy + cy + hy^2 + k, & y \in \left[0; -\frac{2a+b}{g}\right]; \\ K(x_{\max}, y) = K\left(-\frac{b+gy}{2a}, y\right) = y^2 \frac{4ah-g^2}{4a} + y \frac{2ac-bg}{2a} - \frac{b^2}{4a} + k, & y \in \left[-\frac{2a+b}{g}; 1\right]. \end{cases} \quad (64)$$

Due to the inequality (16) there by the condition $2h(2a+b) - g(g+c) > 0$ will be the point $y_{\min}^{(1)} \in \left(0; -\frac{2a+b}{g}\right)$, and due to the statement (21) there by the same condition will be the point $y_{\min} < -\frac{2a+b}{g}$.

Case 8. $b+g > 0$, $2a+b \geq 0$, $2a+b+g \leq 0$, $2h(2a+b) - g(g+c) > 0$

Having here the double parabolic inequalities (29) and

$$K(x_{\max}, y_{\min}) < K\left(x_{\max}, -\frac{2a+b}{g}\right) < K(x_{\max}, 1), \quad (65)$$

the minimum of the function (64) on the segment Y

$$\begin{aligned} \min_{y \in [0; 1]} \max_{x \in [0; 1]} K(x, y) &= \min \left\{ \min_{y \in [0; -\frac{2a+b}{g}]} K(1, y), \min_{y \in [-\frac{2a+b}{g}; 1]} K(x_{\max}, y) \right\} = \\ &= \min \left\{ K(1, y_{\min}^{(1)}), \min \left\{ K\left(x_{\max}, -\frac{2a+b}{g}\right), K(x_{\max}, 1) \right\} \right\} = \\ &= \min \left\{ K(1, y_{\min}^{(1)}), K\left(x_{\max}, -\frac{2a+b}{g}\right) \right\} = K(1, y_{\min}^{(1)}) = a + b - \frac{(g+c)^2}{4h} + k = V_{\text{opt}} \end{aligned} \quad (66)$$

is reached on the optimal strategies set (31). Now it is quite clear that the investigated case game solution is the set (36).

Setting up the condition $2h(2a+b) - g(g+c) \leq 0$ there appear the point $y_{\min}^{(1)} \geq -\frac{2a+b}{g}$ and the point $y_{\min} \geq -\frac{2a+b}{g}$. And as there is the difference

$$y_{\min} - 1 = \frac{bg - 2ac}{4ah - g^2} - 1 = \frac{bg - 2ac - 4ah + g^2}{4ah - g^2} = \frac{g(b+g) - 2a(c+2h)}{4ah - g^2} \quad (67)$$

then $y_{\min} \leq 1$ by $g(b+g) - 2a(c+2h) \geq 0$.

Case 9. $b+g > 0, 2a+b \geq 0, 2a+b+g \leq 0, 2h(2a+b) - g(g+c) \leq 0, g(b+g) - 2a(c+2h) \geq 0$

Having here the double parabolic inequalities (38) and

$$\left\{ K\left(x_{\max}, -\frac{2a+b}{g}\right) \geq K(x_{\max}, y_{\min}), K(x_{\max}, y_{\min}) \leq K(x_{\max}, 1) \right\}, \quad (68)$$

the minimum of the function (64) on the segment Y

$$\begin{aligned} \min_{y \in [0; 1]} \max_{x \in [0; 1]} K(x, y) &= \min \left\{ \min_{y \in \left[-\frac{2a+b}{g}; 1\right]} K(1, y), \min_{y \in \left[-\frac{2a+b}{g}; 1\right]} K(x_{\max}, y) \right\} = \\ &= \min \left\{ \min \left\{ K(1, 0), K\left(1, -\frac{2a+b}{g}\right) \right\}, K(x_{\max}, y_{\min}) \right\} = \\ &= \min \left\{ K\left(1, -\frac{2a+b}{g}\right), K(x_{\max}, y_{\min}) \right\} = \min \left\{ K\left(x_{\max}, -\frac{2a+b}{g}\right), K(x_{\max}, y_{\min}) \right\} = \\ &= K(x_{\max}, y_{\min}) = K\left(-\frac{b+gy}{2a}, \frac{bg-2ac}{4ah-g^2}\right) = \frac{c(ac-bg)+b^2h}{g^2-4ah} + k = V_{\text{opt}} \end{aligned} \quad (69)$$

is reached on the optimal strategies set (40) of the second player. So, the investigated case game solution is the set (44).

Case 10. $b+g > 0, 2a+b \geq 0, 2a+b+g \leq 0, 2h(2a+b) - g(g+c) \leq 0, g(b+g) - 2a(c+2h) < 0$

Here appear the points $y_{\min}^{(1)} \geq -\frac{2a+b}{g}$ and $y_{\min} > 1$. It means the double parabolic inequalities (38) and

$$K\left(1, -\frac{2a+b}{g}\right) = K\left(x_{\max}, -\frac{2a+b}{g}\right) > K(x_{\max}, 1) > K(x_{\max}, y_{\min}). \quad (70)$$

Then the minimum of the function (64) on the segment Y

$$\begin{aligned} \min_{y \in [0; 1]} \max_{x \in [0; 1]} K(x, y) &= \min \left\{ \min_{y \in \left[-\frac{2a+b}{g}; 1\right]} K(1, y), \min_{y \in \left[-\frac{2a+b}{g}; 1\right]} K(x_{\max}, y) \right\} = \\ &= \min \left\{ \min \left\{ K(1, 0), K\left(1, -\frac{2a+b}{g}\right) \right\}, \min \left\{ K\left(x_{\max}, -\frac{2a+b}{g}\right), K(x_{\max}, 1) \right\} \right\} = \\ &= \min \left\{ K\left(1, -\frac{2a+b}{g}\right), K(x_{\max}, 1) \right\} = \min \left\{ K\left(x_{\max}, -\frac{2a+b}{g}\right), K(x_{\max}, 1) \right\} = K(x_{\max}, 1) = \\ &= K\left(-\frac{b+gy}{2a}, 1\right) = K\left(-\frac{b+g}{2a}, 1\right) = \frac{4ah-g^2}{4a} + \frac{2ac-bg}{2a} - \frac{b^2}{4a} + k = c+h - \frac{(b+g)^2}{4a} + k = V_{\text{opt}} \end{aligned} \quad (71)$$

is reached on the optimal strategies set (55) of the second player. The corresponding equation (32) now is

$$V_{\text{opt}} = K\left(-\frac{b+g}{2a}, 1\right) = c+h - \frac{(b+g)^2}{4a} + k = ax^2 + bx + gx + c + h + k = K(x, 1) = K(x, y_{\text{opt}}); \quad (72)$$

$$ax^2 + bx + gx + \frac{(b+g)^2}{4a} = a\left(x + \frac{b+g}{2a}\right)^2 = 0. \quad (73)$$

The last equation gives the roots $x_1 = x_2 = -\frac{b+g}{2a}$ of equation (72). The conditions $b+g > 0$ and $2a+b+g \leq 0$ mean that the value $-\frac{b+g}{2a} \in (0; 1]$ and the optimal strategies set of the first player

$$X_{\text{opt}} = \{x_1\} = \{x_2\} = \left\{ -\frac{b+g}{2a} \right\}. \quad (74)$$

Consequently, the investigated case game solution is the set

$$\mathcal{R} = \left\{ \left\{ -\frac{b+g}{2a} \right\}, \{1\}, c+h - \frac{(b+g)^2}{4a} + k \right\}. \quad (75)$$

Running further, as by the inequality $2a+b+g > 0$ there is the inequality $a+b+gy > 0 \quad \forall y \in [0; 1]$, then the maximum of the surface (1) on the segment X of the variable x is

$$\max_{x \in [0; 1]} K(x, y) = \max \{K(0, y), K(1, y)\} = K(1, y) = a+b+gy+cy+hy^2+k. \quad (76)$$

As $g+c < 0$ then here the point $y_{\min}^{(1)} \in (0; 1]$ by $g+c+2h \geq 0$.

Case 11. $b+g > 0, 2a+b \geq 0, 2a+b+g > 0, g+c+2h \geq 0$

As here the point $y_{\min}^{(1)} \in (0; 1]$ then there is the double parabolic inequality

$$\left\{ K(1, 0) > K(1, y_{\min}^{(1)}), K(1, y_{\min}^{(1)}) \leq K(1, 1) \right\}. \quad (77)$$

Then the minimum of the parabola (76) on the segment Y

$$\begin{aligned} \min_{y \in [0; 1]} \max_{x \in [0; 1]} K(x, y) &= \min_{y \in [0; 1]} K(1, y) = \min_{y \in [0; 1]} (a+b+gy+cy+hy^2+k) = \\ &= K(1, y_{\min}^{(1)}) = a+b - \frac{(g+c)^2}{4h} + k = V_{\text{opt}} \end{aligned} \quad (78)$$

is reached on the set (31). Clearly, that the investigated case game solution is the set (36) once again.

Case 12. $b+g > 0, 2a+b \geq 0, 2a+b+g > 0, g+c+2h < 0$

As here the point $y_{\min}^{(1)} > 1$ then there is the double parabolic inequality

$$K(1, 0) > K(1, 1) > K(1, y_{\min}^{(1)}), \quad (79)$$

meaning that the minimum of the parabola (76) on the segment Y

$$\begin{aligned} \min_{y \in [0; 1]} \max_{x \in [0; 1]} K(x, y) &= \min_{y \in [0; 1]} K(1, y) = \min \{K(1, 0), K(1, 1)\} = \\ &= K(1, 1) = a+b+g+c+h+k = V_{\text{opt}} \end{aligned} \quad (80)$$

is reached on the set (55). The roots of the corresponding equation (32)

$$\begin{aligned} V_{\text{opt}} = K(1, 1) &= a+b+g+c+h+k = ax^2+bx+gx+c+h+k = \\ &= a(x-1) \left(x + \frac{a+b+g}{a} \right) + a+b+g+c+h+k = K(x, 1) = K(x, y_{\text{opt}}) \end{aligned} \quad (81)$$

are $x_1 = 1$ and $x_2 = -\frac{a+b+g}{a}$. But $2a+b+g > 0$ means that $-\frac{a+b+g}{a} > 1$. Then the optimal strategies set of the first player is (35). Consequently, the investigated case game solution is the set

$$\mathcal{R} = \left\{ \{1\}, \{1\}, a+b+g+c+h+k \right\}. \quad (82)$$

Taking on the factor $2a+b < 0$ by $b+g > 0$, the kernel (1) maximum is (10), owing to the value $-\frac{2a+b}{g} < 0$ and the formula (64). With the difference (67) the point $y_{\min} \in (0; 1]$ by $g(b+g) - 2a(c+2h) \geq 0$.

Case 13. $b+g > 0, 2a+b < 0, g(b+g) - 2a(c+2h) \geq 0$

As here the minimum point $y_{\min} \in (0; 1]$ then there is the double parabolic inequality

$$\left\{ K(x_{\max}, 0) > K(x_{\max}, y_{\min}), K(x_{\max}, y_{\min}) \leq K(x_{\max}, 1) \right\}, \quad (83)$$

whereupon the minimum of the parabola (10) on the segment Y

$$\begin{aligned} \min_{y \in [0; 1]} \max_{x \in [0; 1]} K(x, y) &= \min_{y \in (0; 1]} K(x_{\max}, y) = \\ &= K(x_{\max}, y_{\min}) = K\left(-\frac{b+gy}{2a}, \frac{bg-2ac}{4ah-g^2}\right) = \frac{c(ac-bg)+b^2h}{g^2-4ah} + k = V_{\text{opt}} \end{aligned} \quad (84)$$

is reached on the set (40), and the investigated case game solution is the set (44).

Case 14. $b+g > 0, 2a+b < 0, g(b+g) - 2a(c+2h) < 0$

In this relational topology the minimum point $y_{\min} > 1$ by the double parabolic inequality

$$K(x_{\max}, 0) > K(x_{\max}, 1) > K(x_{\max}, y_{\min}). \quad (85)$$

Then the minimum of the parabola (10) on the segment Y

$$\begin{aligned} \min_{y \in [0; 1]} \max_{x \in [0; 1]} K(x, y) &= \min_{y \in (0; 1]} K(x_{\max}, y) = \\ &= \min\{K(x_{\max}, 0), K(x_{\max}, 1)\} = K(x_{\max}, 1) = K\left(-\frac{b+gy}{2a}, 1\right) = K\left(-\frac{b+g}{2a}, 1\right) = \\ &= \frac{4ah-g^2}{4a} + \frac{2ac-bg}{2a} - \frac{b^2}{4a} + k = c+h - \frac{(b+g)^2}{4a} + k = V_{\text{opt}} \end{aligned} \quad (86)$$

is reached on the optimal strategies set (55) of the second player, whence the optimal strategies set of the first player (74) gives the investigated case game solution in the set (75).

Now if to aggregate and group the investigated 14 cases into the table below, then it is certain, that there are the six unique solution cases, being in the pure strategies, where the second player never applies its minimal pure strategy $y = 0$.

Table 1 –The six unique solutions of the specified strictly convex-concave continuous antagonistic game

Relational topologies in the kernel (1) by $a < 0, b > 0, g < 0, c < 0, h > 0, k \in \mathbb{R}$	Game solution $\mathcal{R} = \{X_{\text{opt}}, Y_{\text{opt}}, V_{\text{opt}}\}$
Case 1. $b+g \leq 0, 2a+b \geq 0, 2h(2a+b) - g(g+c) > 0$	$\mathcal{R} = \left\{ \{1\}, \left\{ -\frac{g+c}{2h} \right\}, a+b - \frac{(g+c)^2}{4h} + k \right\}$
Case 8. $b+g > 0, 2a+b \geq 0, 2a+b+g \leq 0, 2h(2a+b) - g(g+c) > 0$	
Case 11. $b+g > 0, 2a+b \geq 0, 2a+b+g > 0, g+c+2h \geq 0$	
Case 2. $b+g \leq 0, 2a+b \geq 0, 2h(2a+b) - g(g+c) \leq 0, 2hb - cg > 0$	$\mathcal{R} = \left\{ \left\{ \frac{cg-2bh}{4ah-g^2} \right\}, \left\{ \frac{bg-2ac}{4ah-g^2} \right\}, \frac{c(ac-bg)+b^2h}{g^2-4ah} + k \right\}$
Case 5. $b+g \leq 0, 2a+b < 0, 2hb - cg > 0$	
Case 9. $b+g > 0, 2a+b \geq 0, 2a+b+g \leq 0, 2h(2a+b) - g(g+c) \leq 0, g(b+g) - 2a(c+2h) \geq 0$	
Case 13. $b+g > 0, 2a+b < 0, g(b+g) - 2a(c+2h) \geq 0$	
Case 3. $b+g \leq 0, 2a+b \geq 0, 2h(2a+b) - g(g+c) \leq 0, 2hb - cg \leq 0, c+2h \geq 0$	$\mathcal{R} = \left\{ \{0\}, \left\{ -\frac{c}{2h} \right\}, k - \frac{c^2}{4h} \right\}$
Case 6. $b+g \leq 0, 2a+b < 0, 2hb - cg \leq 0, c+2h \geq 0$	$\mathcal{R} = \{ \{0\}, \{1\}, c+h+k \}$
Case 4. $b+g \leq 0, 2a+b \geq 0, 2h(2a+b) - g(g+c) \leq 0, 2hb - cg \leq 0, c+2h < 0$	
Case 7. $b+g \leq 0, 2a+b < 0, 2hb - cg \leq 0, c+2h < 0$	
Case 10. $b+g > 0, 2a+b \geq 0, 2a+b+g \leq 0, 2h(2a+b) - g(g+c) \leq 0, g(b+g) - 2a(c+2h) < 0$	$\mathcal{R} = \left\{ \left\{ -\frac{b+g}{2a} \right\}, \{1\}, c+h - \frac{(b+g)^2}{4a} + k \right\}$
Case 14. $b+g > 0, 2a+b < 0, g(b+g) - 2a(c+2h) < 0$	$\mathcal{R} = \{ \{1\}, \{1\}, a+b+g+c+h+k \}$
Case 12. $b+g > 0, 2a+b \geq 0, 2a+b+g > 0, g+c+2h < 0$	

The formulated above theorem has been proved.

The investigated game and the proved theorem conclusion

The proved theorem may be used with the table 1 for the fast decision-making in conflict systems, which may be modeled as the continuous antagonistic games [1, 3, 5, 6, 8]. In modeling processes of machine-building aggregates run-in time selection the second player (projector) should hold its pure optimal strategy as the relative run-in time. This gives at once the pragmatically single solution on how long to take a machine-building

aggregate at the run-in time. The future investigations should be directed towards proving theorems for the continuous antagonistic games, which are solved in the mixed strategies.

References

1. Kumkov S. I. Optimal strategies in a differential game with incomplete information / S. I. Kumkov, V. S. Patsko // Tr. Inst. Mat. Mekh. — N. 3. — 1995. — P. 104 — 131.
2. Savinov V. B. A differential pursuit game with one pursuer and several evaders / V. B. Savinov // Tr. Inst. Mat. Mekh. — N. 3. — 1995. — P. 147 — 171.
4. Черноруцкий И. Г. Методы принятия решений / Черноруцкий И. Г. — СПб. : БХВ-Петербург, 2005. — 416 с. : ил.
5. Яновская Е. Б. Об антагонистических играх, разыгрываемых на функциональных пространствах / Е. Б. Яновская // Лит. матем. сб. — 1967. — № 3 (7). — С. 547 — 557.
6. Чикрий А. А. Конфликтно-управляемые процессы / А. А. Чикрий. — К. : Наук. думка, 1992. — 383 с.
7. Воробьев Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Воробьев Н. Н. — М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 272 с.
8. Теория игр : [учеб. пособие для ун-тов] / Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. — М. : Высшая школа, Книжный дом "Университет", 1998. — 304 с. : ил.
9. Romanuke V. V. The 12 situations in the kernel of a continuous strictly convex antagonistic game and the nine game solution forms / V. V. Romanuke // Информационно-вычислительные технологии и их приложения: сборник статей IX Международной научно-технической конференции. — Пенза : РИО ПГСХА, 2008. — С. 247 — 257.
10. Пинелис И. Ф. Критерии полной определённости для вогнуто-выпуклых игр / И. Ф. Пинелис // Матем. заметки. — № 49:3. — 1991. — С. 73 — 76.
11. Яновская Е. Б. Теоремы о минимаксах для игр на единичном квадрате / Е. Б. Яновская // Теория вероятн. и её примен. — 1964. — Вып. 3 (9). — С. 554 — 555.

Author inquiry

Романюк Вадим Васильович — кандидат технічних наук, доцент кафедри прикладної математики та соціальної інформатики Хмельницького національного університету; 29016, Україна, м. Хмельницький, вул. Інститутська, 11; тел. 0972895239, e-mail: romanukevadimv@mail.ru

УДК 621.39

О.М. ТКАЧЕНКО, О.Ф. ГРІЙО ТУКАЛО

ПОШУК ВЕКТОРІВ У КОДОВИХ КНИГАХ ПРИ УЩІЛЬНЕННІ МОВЛЕННЯ НА ОСНОВІ БІНАРНОГО ДЕРЕВА

Анотація: Передача мовленнєвих сигналів у неущільненому вигляді потребує швидкісних каналів зв'язку через велику надлишковість даних. Саме тому в сучасних системах цифрового зв'язку широко застосовуються алгоритми кодування мовлення, що реалізують високу ступінь ущільнення при збереженні достатнього рівня якості звучання, зокрема з використанням кодових книг. При цьому широко застосовується векторне квантування. Проте практичне застосування векторного квантування у реальному масштабі часу обмежено через різке зростання витрат пам'яті та часу на пошук кодованого вектора у кодових книгах. Для скорочення часу пошуку найближчого вектора у кодових книгах запропоновано метод структуризації кодових книг на основі бінарного дерева. Показано, що використання бінарного дерева дозволяє суттєво зменшити кількість вимірювань відстані, необхідних для пошуку найближчого сусіднього вектора. Проаналізовано основні фактори, що впливають на ефективність пошуку. Розглянуто кілька варіантів розбиття області параметрів при створенні дерева, а саме: *midpt*, коли комірка ділиться січною площинною посередині перпендикулярно найдовшій стороні; *sl_midpt*, що відрізняється від попереднього можливістю зсуву січної площини з метою зменшення кількості тривіальних листів; *sl_fair*, що поєднує методи розбиття по медіані та *sl_midpt* з врахуванням обмеження на відношення сторін створюваних комірок. Наведено результати порівняльного аналізу вказаних варіантів. Розглянуто властивості LSF як об'єкта квантування, які необхідно враховувати при побудові бінарного дерева. Експериментально досліджено продуктивність методів. Оскільки всі вектори в кодових книгах займають лише верхню частину прямокутної області, було запропоновано повернути осі координат на 45 градусів проти годинникової стрілки, перерахувавши координати векторів. Це дало можливість дещо скоротити час пошуку за рахунок штучного досягнення більшої симетричності розбиття дерева. Оцінювання результатів проводилося за кількістю обчислень відстаней у кодових книгах, необхідною для пошуку найближчого вектора, відносно розміру тестової вибірки. Застосування методу при квантуванні мовлення дозволило зменшити час пошуку найближчого вектора до 5% від часу повного пошуку. Скорочення часу пошуку (\approx в 17 разів) в процесі передавання мовленнєвих сигналів досягається за рахунок додаткових обчислювальних витрат на підготовчому етапі, необхідних для побудови бінарного дерева, а також збільшення обсягів пам'яті, потрібної для його зберігання.

Ключові слова: ущільнення мовленнєвих сигналів, лінійні спектральні частоти, кодові книги, бінарні дерева.

Аннотация: Передача речевых сигналов в несжатом виде требует скоростных каналов связи через большую избыточность данных. Именно поэтому в современных системах цифровой связи широко применяются алгоритмы кодирования речи, реализующих высокую степень уплотнения при сохранении достаточного уровня качества звучания, в частности с использованием кодовых книг. При этом широко применяется векторное квантование. Однако практическое применение векторного квантования в реальном масштабе времени ограничено из-за резкого роста затрат памяти и времени на поиск кодированного вектора в кодовых книгах. Для сокращения времени поиска ближайшего вектора в кодовых книгах предложен метод структуризации кодовых книг на основе бинарного дерева. Показано, что использование бинарного дерева позволяет существенно уменьшить количество измерений расстояния, необходимых для поиска ближайшего соседнего вектора. Проанализированы основные факторы, влияющие на эффективность поиска. Рассмотрено несколько вариантов разбиения области параметров при создании дерева, а именно: *midpt*, когда ячейка делится секущей плоскостью посередине перпендикулярно самой длинной стороне; *sl_midpt*, отличающийся от предыдущего возможностью смещения секущей плоскости с целью уменьшения количества тривиальных листов; *sl_fair*, сочетающий методы разбиения по медиане и *sl_midpt* с учетом ограничения на отношении сторон создаваемых ячеек. Приведены результаты сравнительного анализа указанных вариантов. Рассмотрены свойства LSF как объекта квантования, которые необходимо учитывать при построении бинарного дерева. Экспериментально исследовано производительность методов. Поскольку все векторы в кодовых книгах занимают лишь верхнюю часть прямоугольной области, было предложено повернуть оси координат на 45 градусов против часовой стрелки, перечислив координаты векторов. Это позволило несколько сократить время поиска за счет искусственного достижения большей симметричности разбиения дерева. Оценка результатов проводилась по количеству вычислений расстояний в кодовых книгах, необходимых для поиска ближайшего вектора, относительно размера тестовой выборки. Применение метода при квантовании речи позволило уменьшить время поиска ближайшего вектора до 5% от времени полного поиска. Сокращения времени поиска (\approx в 17 раз) в процессе передачи речевых сигналов достигается за счет дополнительных вычислительных затрат на подготовительном этапе, необходимых для построения бинарного дерева, а также увеличение объемов памяти, необходимой для его хранения.

Ключевые слова: сжатие речевых сигналов, линейные спектральные частоты, кодовые книги, бинарные деревья.

Abstract: Speech signals transmission without coding requires high-speed communication channels because of a large redundancy of data. That is why in modern digital communication systems are widely used speech coding algorithms that implement a high degree of coding while maintaining a sufficient level of sound quality, in particular including codebooks using. It is widely used vector quantization. However, the practical use of vector quantization in real time is limited due to the sharp increase in costs of memory and coded vector search time in the codebooks. To reduce the nearest vector search time in codebooks the method of structuring the codebook is proposed. Shown that using of the binary tree allows to reduce the distance measurements number significantly that are needed to find the nearest neighbor vector. The main factors influencing search performance are analyzed. Several parameters partition options are considered when creating the tree, namely: *midpt*, which cuts the current cell by the splitting plane through its midpoint orthogonal to its longest side; *sl_midpt*, that differs from the previous by "sliding" the splitting plane, if a trivial split were to result in order to avoid this; *sl_fair*, that combines split at the median with *sl_midpt* taking into account the aspect ratio bound. The results of comparative analysis of the listed methods are presented. Properties LSF as an object of quantization are considered when building the binary tree. The methods performance are studied experimentally. As all vectors in codebooks cover only the top of the rectangular area it was proposed to rotate the coordinate axis 45 degrees counterclockwise, recalculating the vectors coordinates. This enabled us to reduce the search time due to the achieving more symmetrical tree partitioning. Results evaluation was based on distances calculations number in the codebooks needed to find the nearest vector, among the sample test. The method using for speech quantization reduced the nearest vector search time to 5% of full-time search. Search time reducing (\approx 17 times) when the transmission of speech signals is achieved by additional computational costs of the preparatory steps needed for building a binary tree, and also increase the amount of memory needed to store.

Keywords: speech signal coding, line spectral frequency, codebooks, binary trees.

Вступ

Розвиток сучасних технологій цифрового зв'язку, таких як стільникова та IP-телефонія, потребує розробки ефективних методів і алгоритмів кодування мовлення, що реалізують високу ступінь ущільнення при збереженні достатнього рівня якості звучання. У теперішній час найвищий рівень ущільнення (найменшу швидкість передачі) забезпечують методи на основі лінійного прогнозування LPC (Linear Prediction Coding), які при безпосередній реалізації дозволяють зменшити швидкість передачі даних до 4800 біт/с. На практиці лінійні коефіцієнти прогнозування представляють у вигляді LSF (лінійних спектральних частот), що надає додаткові можливості підвищення рівня ущільнення мовленнєвого сигналу.

Для подальшого ущільнення використовуються квантування LSF за допомогою певних наборів значень, які називають кодовими книгами (КК). Скалярне квантування (СК) LSF не потребує ані значних обчислювальних ресурсів, ані великих витрат пам'яті для своєї реалізації, проте останнім часом у стандартах ущільнення мови частіше використовують векторне квантування (ВК). Останнє дозволяє отримати менше спектральне спотворення, порівняно із СК, за умови кодування сигналу однаковою кількістю бітів. Цей виграв зумовлений тим, що ВК більш ефективно використовує кореляцію між окремими складовими вектора параметрів. Перевага зростає із зростанням кількості компонентів, що квантується разом, тобто із збільшенням розмірності вектора. Проте разом з цим зростають витрати пам'яті, а також час на пошук кодованого вектора у кодовій книзі, що зумовлює суттєві обмеження на практичне застосування ВК у реальному масштабі часу. Тому в діючих стандартах застосовують субоптимальне кодування, коли 10-вимірний вектор параметрів розбивають на 2 або більше підвекторів меншої розмірності [1]. Це дозволяє зменшити швидкість передачі даних до 2400 біт/с.

З метою зменшення часу пошуку в [2] було запропоновано декілька підходів до впорядкування векторів у кодовій книзі, названих авторами методами швидкого векторного квантування (fast vector quantization methods). Було показано, що складність обчислень при застосуванні наведених методів складає порядка 25% від складності обчислень при повному пошуку без суттєвої втрати продуктивності, що оцінювалася по спектральному спотворенню.

В [3] було розроблено метод структуризації КК на основі відношення мажорювання. Це дозволило зменшити складність обчислень до 16-20% від відповідної складності при повному пошуку. У даній статті пропонується метод пошуку по бінарному дереву, вперше введений при кодуванні зображень [4]. Застосування метода при квантуванні мовлення дозволяє зменшити час пошуку найближчого вектора до 5% від часу повного пошуку.

Мета та задачі статті

Метою роботи є зменшення складності обчислень при кодуванні мовленнєвих сигналів за рахунок пошуку найближчого вектора у кодовій книзі по бінарному дереву.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі:

- розробити модель і структуру даних, що зберігаються у КК;
- розробити метод пошуку найближчого вектора у створеній КК;
- оцінити ефективність розробленого методу.

Розробка математичної моделі та метода пошуку по бінарному дереву

Нехай КК містить кінцеву множину векторів $Q = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\}$, $Y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{iM})$. Таким чином, з кожним вектором Y_j у КК пов'язаний індекс, або кодове слово j , що може бути записано як N -розрядне ціле число. На вхід квантизатора поступає вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_M)$. В результаті кодування необхідно вибрати таке кодове слово j , що мінімізує спотворення $d(X, Y_j)$ (правило вибору найближчого сусіднього вектора).

$$R_j = \{X : d(X, Y_j) \leq d(X, Y_i); \forall i \in I, i \neq j\}, \quad (1)$$

де $I = \{1, 2, \dots, N\}$ - множина індексів.

У даній роботі для вимірювання спотворення використовувалася Евклідова відстань:

$$d^2(X, Y_i) = \sum_{k=1}^M (x_k - y_{ik})^2. \quad (2)$$

Ациклічний зв'язний граф $T=(V,E)$, де $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ - множина вершин, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ - множина пар елементів множини V , або множина ребер ($m = n - 1$), називається

деревом. Якщо з деякої вершини v_i веде ребро у вершину v_j ($v_i, v_j \in V$), то v_i називається предком v_j , а v_j - нащадком v_i .

Вершини дерева поділяють на такі три групи:

- корінь – одна виокремлена вершина, в яку не входить жодного ребра, тобто вона не має предків;
- вузли – вершини, в які входить одне ребро і виходить одне чи більше ребер;
- листи або кінцеві (термінальні) вершини – вершини, в які входить одне ребро і не виходить жодного ребра (не мають нащадків).

Для $\forall v_i \in V$, підграф дерева $T=(V,E)$, що включає всі досяжні з V_i вершини і з'єднуючі їх ребра з E , утворює піддерево $T_{v_i} \in T$ з коренем V_i . З цього випливає, що кожна вершина є в свою чергу коренем деякого піддерева. Тобто піддерево – це $\forall v_i \in V$ з усіма її нащадками. Якщо існує відносний порядок на піддеревах $T = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$, то таке дерево називається впорядкованим. Висотою дерева називається максимальна із довжин усіх можливих шляхів від кореня дерева до термінальних вершин $H \geq h_k; k \in L$ (L - кількість листів).

Важливим окремим випадком кореневих дерев є бінарні дерева (БД), які визначаються як множина вершин, яка має виокремлений корінь та два піддерева (праве та ліве), що не перетинаються, або є пустою множиною вершин (на відміну від звичайного дерева, яке не може бути пустим): $T \in \{T_1, T_2\}; T_1 \not\subset T_2$. Таким чином, бінарне дерево — це структура даних, в якій кожна вершина має не більше двох нащадків (правого та лівого).

Бінарне дерево пошуку (англ. binary search tree, BST) — БД, в якому кожній вершині $v_i \in V$ співставлене певне значення $Val[v_i]$. При цьому такі значення повинні задовольняти умові впорядкованості: нехай v_i — довільна вершина БД пошуку. Якщо вершина v_j знаходиться в лівому піддереві вершини v_i , то $Val[v_j] \leq Val[v_i]$.

Якщо v_j знаходиться у правому піддереві x , то $Val[v_j] \geq Val[v_i]$. Використання БД дозволяє суттєво зменшити кількість вимірювань відстані K , необхідних для пошуку найближчого сусіднього вектора ($K \approx \log_2 N$ замість $K = N$ при повному пошуку, де N - кількість векторів у КК). Проте при цьому зростає спектральне спотворення, оскільки пошук по БД не гарантує знаходження дійсно найближчого вектора відповідно до формули (1) та рисунку 1.

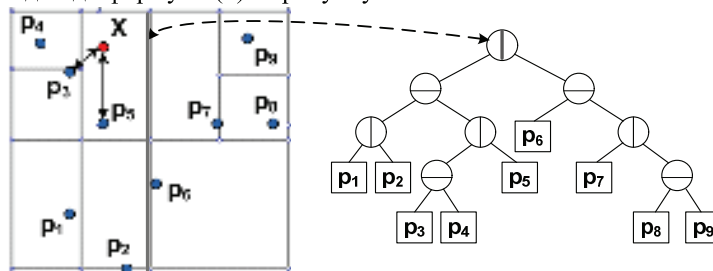


Рисунок 1. Ілюстрація впорядкування КК на основі бінарного дерева

У роботі [5, 6] запропоновано вдосконалену процедуру пошуку по БД. Як вище було зазначено, в БД (крім кореневої) присутні два типи вершин: термінальні (листи) та нетермінальні (вузли). Кожен лист дерева може містити не більше одного вектора КК, тобто $C_k \subset Y_i$ або $C_k \subset \emptyset$, де C_k - деякий лист БД (тобто в нашому випадку кількість листів $k \geq 4096$).

Розрізняють дві фази пошуку - пряму та зворотню. Під час прямого пошуку фіксуються всі відстані до вузлів d_i . Пряма фаза завершується обчисленням відстані до відповідного листа $D_k = D_{min}$. Після цього починається зворотня фаза пошуку, при цьому обчислюються відстані D_k лише до тих листів дерева, які можуть забезпечити виконання $D_k < D_{min}$. Якщо ця умова виконується, вважається $D_{min} = D_k$. На зворотній фазі також можуть обчислюватися відстані до вузлів. Пошук найближчого вектора для двовимірного випадку наведено на рисунку 2. Розглянута процедура гарантує знаходження найближчого сусіднього вектора згідно (1), проте потребує значно більшої кількості вимірювань відстані, ніж $K \approx \log_2 N$.

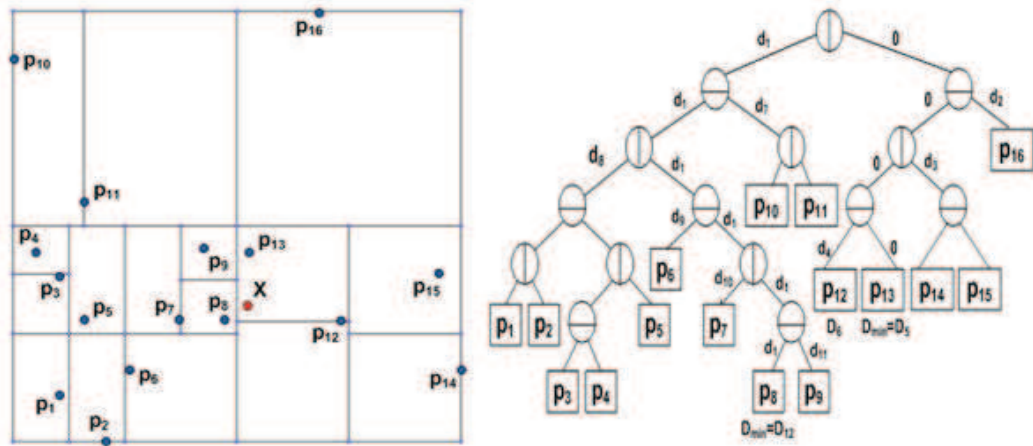


Рисунок 2. Ілюстрація пошуку найближчого вектора по бінарному дереву

З метою скорочення часу в [4] запропоновано для обчислення відстані до вузлів скористатися більш ефективною формулою

$$D_k^2 = (D_k^2)' - (y'_k - x_k)^2 + (y_k - x_k)^2, \quad (3)$$

де $(D_k^2)'$ - раніше обчислена відстань до певного вузла дерева. Застосування (3) можливе завдяки тому, що на кожному кроці просування по дереву змінюється лише одна з координат. Обчислення відстані згідно (3) потребує лише одного множення та трьох додавань, оскільки $(y'_k - x_k)^2$ можна зберігати у структурі даних дерева. Обчислення відстані до листів доводиться виконувати за формулою (2).

Застосування БД при кодуванні мовлення

Розглядалися різні варіанти побудови дерева, застосування яких призводить до різної кількості обчислень відстані під час пошуку:

- **midpt** - комірка ділиться січною площиною посередині перпендикулярно найдовшій стороні. Відношення сторін є обмеженим. Хоча цей метод простий, його неефективно використовувати для великих розмірностей, оскільки він може генерувати велику кількість тривіальних листів (тобто, які не містять векторів КК), а також незбалансовані розбиття;
- **sl_midpt** - працює як і попередній, якщо по обидві сторони січної площини є точки. Інакше січну площину рухають, поки вона не досягне деякого вектора КК, що забезпечує відсутність тривіальних листів і відповідно БД має менше вузлів;
- **sl_fair** - різновид останнього; поєднує методи розбиття по медіані та **sl_midpt**, враховується обмеження на відношення сторін створюваних комірок, забезпечує більш збалансоване розбиття.

Найкращим варіантом дерева слід вважати такий, коли всі комірки мають кубічну форму (січна площиною ділиться найбільша сторона комірки) з кодовим вектором точно всередині. Проте таке дерево містить багато тривіальних листів і має занадто великий розмір. Тим не менш як критерій для обрання того чи іншого варіанту побудови дерева можна використати співвідношення максимальної та мінімальної сторін комірки або максимальну відстань між двома точками комірки.

Властивості LSF як об'єкта квантування необхідно враховувати при побудові БД. Оскільки для будь-якого вектора LSF параметрів виконується $y_{ik} < y_{ik+1} \forall i \in I$, всі вектори в КК займають лише верхню частину прямокутної області (рисунок 3, а). Враховуючи це, було запропоновано повернути осі координат на 45 градусів проти годинникової стрілки, перерахувавши координати векторів за формулою 4 (рисунок 3, б). Це дало можливість дещо скоротити час пошуку за рахунок штучного досягнення більшої симетричності розбиття дерева (проте і в цьому випадку правильним можна вважати лише початкове розбиття).

$$\begin{aligned} y'_{1k} &= y_{1k} \cdot \cos 45 + y'_{2k} \cdot \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} (y'_{1k} + y'_{2k}); \\ y'_{2k} &= y_{2k} \cdot \cos 45 - y'_{1k} \cdot \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} (y'_{2k} - y'_{1k}). \end{aligned} \quad (4)$$

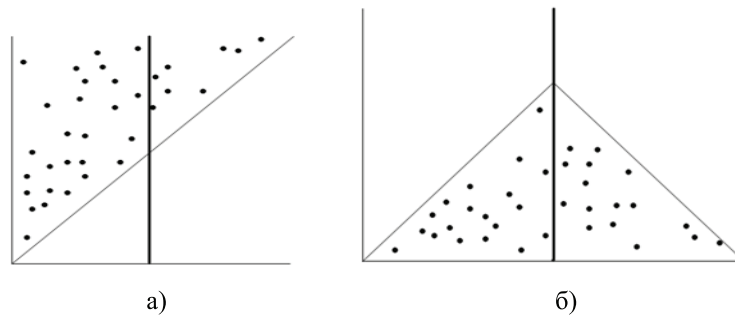


Рисунок 3. Ілюстрація специфіки розміщення векторів в КК в 2-мірному просторі:
а) до повороту; б) після повороту

Експериментальне дослідження метода пошуку по бінарному дереву

Для побудови бінарного дерева та пошуку найближчого вектора було розроблено програмне забезпечення у середовищі Visual Studio 2008. 10-вимірний вектор LSF-параметрів було розбито на дві частини розмірністю $M = 5$, розмір кожної частини КК складав $N = 4096$ підвекторів. Таким чином, обсяг даних, необхідних для представлення короткочасної спектральної інформації, становив 24 біти. Для тестування було відібрано текст (уривок з роману І. Нечуй-Левицького), розмір тестової вибірки складав $V = 20000$ векторів.

У таблиці 1 наведено основні характеристики отриманого БД для кожного метода.

Таблиця 1 – Характеристики БД для КК розміром $M = 5$, $N = 4096$

Метод	Відношення сторін листа	Глибина БД	К-сть листів	К-сть вузлів	К-сть тривіальних листів
Midpt	1.74445	50	7308	7307	3212
sl_midpt	2.26011	23	4096	4095	0
sl_fair	3.00671	18	4096	4095	0

Оцінювання результатів проводилося за кількістю обчислень відстаней (КОВ) у КК C , необхідною для пошуку найближчого вектора, відносно розміру тестової вибірки:

$$КОВ = \frac{C}{V}. \quad (5)$$

Якщо для оцінювання складності обчислень орієнтуватися на значення середньої, а не максимальної КОВ, можна значно зменшити час пошуку (в 3-4 рази). Проте середня КОВ не є інформативною характеристикою для ущільнення мовленнєвих сигналів у реальному часі, оскільки час, заощаджений на обчислення в одному фреймі, неможливо використати в іншому, тому у таблицях наведено значення максимальної КОВ.

Отримані результати при використанні різних методів побудови дерева до і після повороту осі координат на 45 градусів проти годинникової стрілки наведено в таблиці 2 та на рисунку 4.

Таблиця 2 – КОВ для різних методів побудови дерева

Метод	КОВ									
	Середня				Максимальна (% від повного пошуку)					
	До поворота		Після поворота		До поворота			Після поворота		
	до листів	до вузлів	до листів	до вузлів	до листів	до вузлів	сумарна	до листів	до вузлів	сумарна
midpt	28	114	27	115	111 (2.7%)	422 (2,27%)	4,97%	113 (2.75%)	457 (2,46%)	5,21%
sl_midpt	37	91	36	85	153 (3.7%)	329 (1,77%)	5,47%	146 (3.6%)	295 (1,58%)	5,18%
sl_fair	39	95	36	85	162 (3.95%)	333 (1,79%)	5,74%	131 (3.2%)	316 (1,71)	4,91%

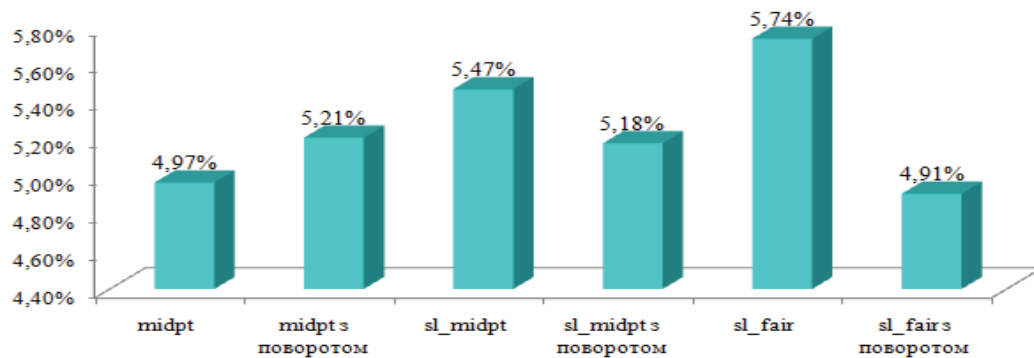


Рисунок 4. Максимальна КОВ для різних методів побудови дерева

Отримані експериментальні дані, наведені у таблиці 2, свідчать, що найпростіший метод побудови дерева midpt після повороту потребує найбільшої сумарної КОВ. Це пояснюється тим, що кількість вузлів в 1,8 разів більша порівняно з двома іншими методами (див. таблиця 1), незважаючи на те, що при обчисленні відносних значень КОВ до вузлів кількість необхідних операцій зменшується в 4,5 рази.

Висновки

Складність обчислень при пошуку найближчого вектора у КК із застосуванням бінарного дерева склала 5 – 6% від складності обчислень при повному пошуку. Витрати пам'яті при цьому в середньому збільшилися в 3 рази.

Таким чином, скорочення часу пошуку (\approx в 17 разів) в процесі передавання мовленнєвих сигналів досягається за рахунок додаткових обчислювальних витрат на підготовчому етапі, необхідних для побудови бінарного дерева, а також збільшення обсягів пам'яті, потрібної для його зберігання.

Література

1. Paliwal K. K., Atal B. S. Efficient vector quantization of LPC parameters at 24 bits/frame — IEEE Transaction on Speech and Audio Processing, 1993.—No. 2, vol. 1.—P. 3—14.
2. Zhou J., Shoham Y., Akansu A. Simple Fast Vector Quantization of the Line Spectral Frequencies // Image Compression and Encryption Technologies. — 2001. — Vol. 4551. — P. 274—282.
3. Біліченко Н.О., Ткаченко О. М., Феферман О. Д., Хрущак С. В. Швидкий пошук при векторному квантуванні лінійних спектральних частот // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2008. — №2, т. 10. — С. 37—47.
4. S. Arya and D. M. Mount. Algorithms for fast vector quantization. In J. A. Storer and M. Cohn, editors, Proc. of DCC '93: Data Compression Conference, pages 381 — 390. IEEE Press, 1993.
5. J. L. Bentley. K-d trees for semidynamic point sets. In Proc. 6th Ann. ACM Sympos. Comput. Geom., pages 187 — 197, 1990.
6. J. H. Friedman, J. L. Bentley, and R. A. Finkel. An algorithm for finding best matches in logarithmic expected time. ACM Transactions on Mathematical Software, 3(3):209 — 226, 1977.

Відомості про авторів

Ткаченко Олександр Миколайович – к.т.н., доцент кафедри обчислювальної техніки, Вінницький національний технічний університет, Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021, тел. 59-84-13, alextk1960@gmail.com.

Грійо Тукало Оксана Франсисківна – студентка кафедри обчислювальної техніки Вінницького національного технічного університету, Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021, xhmargox@gmail.com.

УДК 519.7

И. С. ТКАЧЕНКО, М. И. СЕМЕНОВИЧ

УСТАНОВЛЕНИЕ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ МЕЖДУ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ И ЛЮКА НА ОСНОВЕ СВОЙСТВ СООТВЕТСТВУЮЩИХ ИМ ФУНКЦИЙ

Аннотация. В статье рассмотрено установление взаимосвязей между последовательностями чисел Фибоначчи и чисел Люка, используя при этом обратные гиперболические функции Фибоначчи и функции Люка. Это дало возможность определять номер числа в последовательности, зная само число Фибоначчи или число Люка.

Анотація. В статті досліджено визначення взаємозв'язку між послідовностями чисел Фібоначчі та чисел Люка, використовуючи при цьому обернені гіперболічні функції Фібоначчі та функції Люка. Це дало можливість визначати номер числа в послідовності, знаючи саме число Фібоначчі або число Люка.

Abstract. This article deals with the establishment of linkages between the sequences of Fibonacci numbers and Lucas numbers, using the inverse hyperbolic function of the Fibonacci functions and Lucas functions. This made it possible to determine the number of sequence elements, knowing the exact Fibonacci number or Lucas number.

Введение

Использование некоторых свойств чисел Фибоначчи при создании средств обработки информации стимулирует исследователей к поиску их новых возможностей [1]. Известно [2], что числа Фибоначчи и Люка являются элементами соответствующих последовательностей

$$-8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots \quad (1)$$

и

$$\dots, -11, 7, -4, 3, -1, 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 28, 47, 76, 123, 199, 322, \dots \quad (2)$$

которые формируются с помощью формулы Бине

$$f(n) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \quad (3)$$

для последовательности (1) и соотношения

$$L(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad (4)$$

для последовательности (2).

Учитывая, что $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ и, положив $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$, имеем $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi} = -\varphi^{-1}$, а

также, принимая во внимание четность и нечетность числа n , формула (3) может быть представлена в виде двух соотношений

$$f(2k) = \frac{\varphi^{2k} - \varphi^{-2k}}{\sqrt{5}}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (5)$$

и

$$f(2k+1) = \frac{\varphi^{2k+1} - \varphi^{-2k-1}}{\sqrt{5}}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (6)$$

позволяющих разделить последовательность (1) на две последовательности

$$\dots, 34, 13, 5, 2, 1, 2, 5, 13, 34, 89, 233, \dots, \quad (1^I) \quad (1^{II})$$

а соотношение (4) — в виде

$$L(2k+1) = \varphi^{2k+1} - \varphi^{-2k-1}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (7)$$

и

$$L(2k) = \varphi^{2k} - \varphi^{-2k}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (8)$$

разделяющих последовательность (2) на две последовательности:

$$\dots, -11, -4, -1, 0, 1, 4, 11, 29, 76, \dots \quad (2^I)$$

$$\dots, 47, 18, 7, 3, 2, 3, 7, 18, 47, \dots \quad (2^{II})$$

Сравнивая соотношения (5) – (8) с гиперболическими функциями

$$\text{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad (9)$$

и

$$\text{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad (10)$$

обнаружим не только их внешнюю схожесть, но и взаимосвязь между ними и тригонометрическими функциями, а вводя соответствующие обозначения, получим функции Фибоначчи

$$\mathbf{sft} = \frac{\varphi^{2t} - \varphi^{-2t}}{\sqrt{5}} = \frac{e^{2t \ln \varphi} - e^{-2t \ln \varphi}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{sh}(2t \ln \varphi) = -\frac{2i}{\sqrt{5}} \sin(2ti \ln \varphi), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{cft} &= \frac{\varphi^{2t+1} + \varphi^{-2t-1}}{\sqrt{5}} = \frac{e^{(2t+1) \ln \varphi} + e^{-(2t+1) \ln \varphi}}{\sqrt{5}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{ch}((2t+1) \ln \varphi) = \frac{2}{\sqrt{5}} \cos((2t+1)i \ln \varphi) \end{aligned} \quad (12)$$

и функции Люка

$$\begin{aligned} \mathbf{slt} &= \varphi^{2t+1} - \varphi^{-2t-1} = e^{(2t+1) \ln \varphi} - e^{-(2t+1) \ln \varphi} = \\ &= 2 \operatorname{sh}((2t+1) \ln \varphi) = -2i \sin((2t+1)i \ln \varphi), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\mathbf{clx} = \varphi^{2t} + \varphi^{-2t} = e^{2t \ln \varphi} + e^{-2t \ln \varphi} = 2 \operatorname{ch}(2t \ln \varphi) = 2 \cos(2ti \ln \varphi), \quad (14)$$

которые определены для любого действительного числа t и графическое представление задано в таблице 2 по диагональным клеткам. Свойства этих функций более подробно нашли свое рассмотрение в работе [3]. Для целочисленных значений $[t]$ соотношения (11) и (12) формируют две последовательности (1^I) и (1^{II}) , а соотношения (13) – (14) — две другие последовательности (2^I) и (2^{II}) .

Цель исследования

Задавшись соответствующим номером $k = [t] \in \infty] - \infty, +\infty[$, с помощью известных формул (3), (4) и полученных соотношений (11) – (14) сформировать последовательности чисел Фибоначчи и Люка на основе свойств соответствующих обратных функций Фибоначчи и Люка целочисленного аргумента.

Однако, на практике встречается и задача обратного характера, то есть, зная, что, число Фибоначчи или Люка принадлежит той или иной последовательности (1^I) , (1^{II}) , (2^I) , (2^{II}) , необходимо найти его номер в этой последовательности.

На основе свойств этих функций установим геометрические места точек, определяемых как взаимосвязи между ними.

Метод исследования

Решение поставленной задачи осуществляется путем введения обратных функций Фибоначчи и обратных функций Люка.

Функцию вида $y = \mathbf{asfx}$ назовем обратным синусом Фибоначчи, где $x = \mathbf{sft}$:

Пусть $x = \mathbf{sft} = \frac{\varphi^{2t} - \varphi^{-2t}}{\sqrt{5}}$ или $\varphi^{4t} - x\sqrt{5}\varphi^{2t} - 1 = 0$, положив $\varphi^{2t} = y$, тогда $y^2 - x\sqrt{5}y - 1 = 0$ и, решая это уравнение относительно y , получим

$$y_{1,2} = \frac{x\sqrt{5} \pm \sqrt{5x^2 + 4}}{2},$$

а, следовательно

$$y_{1,2} = \frac{1}{2 \ln \varphi} \ln \left| \frac{x\sqrt{5} \pm \sqrt{5x^2 + 4}}{2} \right|, \quad (15)$$

то есть

$$y = \mathbf{asfx} = \frac{1}{2 \ln \varphi} \ln \left| \frac{x\sqrt{5} + \sqrt{5x^2 + 4}}{2} \right|, \text{ при } x > 0, \quad (16)$$

$$y = \mathbf{asfx} = \frac{1}{2 \ln \varphi} \ln \left| \frac{x\sqrt{5} - \sqrt{5x^2 + 4}}{2} \right|, \text{ при } x < 0. \quad (17)$$

Аналогично определим обратный косинус Фибоначчи:

$$y = \mathbf{acfu} = \frac{1}{2 \ln \varphi} \ln \left| \frac{u\sqrt{5} + \sqrt{5u^2 - 4}}{2\varphi} \right|, \text{ при } u > 0, \quad (18)$$

$$y = \operatorname{acfu} = \frac{1}{2 \ln \varphi} \ln \left| \frac{u\sqrt{5} - \sqrt{5u^2 - 4}}{2\varphi} \right|, \text{ при } u < 0, \quad (19)$$

а также обратный синус Люка:

$$y = \operatorname{aslv} = \frac{1}{2 \ln \varphi} \ln \left| \frac{v + \sqrt{v^2 + 4}}{2\varphi} \right|, \text{ при } v > 0, \quad (20)$$

$$y = \operatorname{aslv} = \frac{1}{2 \ln \varphi} \ln \left| \frac{v - \sqrt{v^2 + 4}}{2\varphi} \right|, \text{ при } v < 0 \quad (21)$$

и косинус Люка

$$y = \operatorname{aclz} = \frac{1}{2 \ln \varphi} \ln \left| \frac{z + \sqrt{z^2 - 4}}{z} \right|, \text{ при } z > 0, \quad (22)$$

$$y = \operatorname{aclz} = \frac{1}{2 \ln \varphi} \ln \left| \frac{z - \sqrt{z^2 - 4}}{z} \right|, \text{ при } z < 0. \quad (23)$$

Основные результаты исследования

Установим взаимосвязь между этими функциями. В частности, между соотношениями (16) и (18), (20) и (22), (16) и (22), (18) и (20), (16) и (20), (18) и (22) получим следующие их места геометрических точек.

1. Взаимосвязь между $y = \operatorname{asfx}$ и $y = \operatorname{acfu}$, то есть (16) и (18):

$$\frac{x\sqrt{5} + \sqrt{5x^2 + 4}}{2} = \frac{u\sqrt{5} + \sqrt{5u^2 - 4}}{2\varphi},$$

$$\varphi x\sqrt{5} + \varphi\sqrt{5x^2 + 4} = u\sqrt{5} + \sqrt{5u^2 - 4};$$

$$(\varphi x\sqrt{5} - u\sqrt{5})^2 = (\sqrt{5u^2 - 4} - \varphi\sqrt{5x^2 + 4})^2;$$

$$5\varphi^2 x^2 - 10\varphi x u + 5u^2 = 5u^2 - 4 - 2\varphi\sqrt{(5u^2 - 4)(5x^2 + 4)} + \varphi^2 u^2 + 4\varphi^2,$$

учитывая, что $\varphi^2 - 1 = \varphi$ имеем $4\varphi^2 - 4 = 4\varphi$

$$(5xu + 2)^2 = 25x^2 u^2 - 20x^2 + 20u^2 - 16;$$

$$25x^2 u^2 + 20ux + 4 = 25x^2 u^2 - 20x^2 + 20u^2 - 16;$$

$$20u^2 - 20ux - 20x^2 - 20 = 0;$$

$$u^2 - ux - x^2 - 1 = 0. \quad (24)$$

Пример: Для $x = 21$; $\operatorname{asf}21 = 4 = y$; $u = 34$; $\operatorname{acf}34 = 4 = y$;

$34^2 - 34 \cdot 21 - 21^2 - 1 = 0$, то есть $1156 - 714 - 441 - 1 = 0$, или $0 \equiv 0$.

Полученное уравнение второго порядка (24), представляет собой уравнение гиперболы с центром координат $O(0;0)$. Наличие в нем произведения u на x в виде слагаемого, свидетельствует о том, что гипербола имеет некоторый наклон к осям Ox и Ou . Поворот их на угол α приведет его к каноническому уравнению гиперболы в новой системе координат [4].

Преобразуем уравнение (24) путем поворота осей координат согласно формулам перехода к новой системе координат

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - u' \sin \alpha; \\ u = x' \sin \alpha + u' \cos \alpha. \end{cases} \quad (25)$$

получим

$$\begin{aligned} & (x' \sin \alpha + u' \cos \alpha)^2 - (x' \cos \alpha - u' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + u' \cos \alpha) - \\ & - (x' \cos \alpha - u' \sin \alpha)^2 - 1 = 0; \\ & (x')^2(\sin^2 \alpha - \cos \alpha \sin \alpha - \cos^2 \alpha) + x' u' (4 \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + \\ & + \end{aligned}$$

$$+(u')^2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha) - 1 = 0.$$

Учитывая, что $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha$; $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$, получим

$$(x')^2 \left(-\frac{1}{2} \sin 2\alpha - \cos 2\alpha \right) + x'u'(2 \sin 2\alpha - \cos 2\alpha) + \\ + (u')^2 \left(\cos 2\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) - 1 = 0 \quad (26)$$

Так как при повороте осей координат должно выполняться соотношение $2 \sin 2\alpha - \cos 2\alpha = 0$, или $\tan 2\alpha = \frac{1}{2}$, то есть коэффициент при произведении $x'u'$ должен быть равен нулю, имеем:

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{1}{2} \approx 0,2318238(RAD) \quad (27)$$

или

$$\alpha = 13,28252559(DEG) = 14^{\circ}45'30,1''.$$

Подставляя значения (27) в (26), получим

$$(x')^2(-0,894427191 - 0,223606792) + \\ + (u')^2(0,894427191 + 0,223606792) = 1,$$

или

$$-(x')^2(1,118033988) + (u')^2(1,118033988) = 1. \quad (28)$$

Учитывая, что $(1,118033988)^{-1} = 0,894427191 = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{2}$ получим для выражения (28) следующее соотношение:

$$-\frac{(x')^2}{\left(\sqrt{\frac{2\varphi}{2+\varphi}}\right)^2} + \frac{(u')^2}{\left(\sqrt{\frac{2\varphi}{2+\varphi}}\right)^2} = 1, \quad (29)$$

что представляет собой уравнение равнобочной гиперболы с асимптотами $u' = \pm x'$ и полуосями $a = b = \sqrt{\frac{2\varphi}{2+\varphi}}$, повернутыми на угол $\alpha = 14^{\circ}45'30,1''$ против часовой стрелки.

Таким образом, геометрическое место точек, связывающее синус Фибоначчи и косинус Фибоначчи, есть гипербола вида (24) или (29), что графически представлено в таблице 2 в соответствующей клетке.

2. Взаимосвязь между $y = aslv$ и $y = aclz$, то есть (20) и (22):

$$\frac{v + \sqrt{v^2 + 4}}{2\varphi} = \frac{z + \sqrt{z^2 - 4}}{2}$$

и выполняя преобразования, аналогичные предыдущему пункту, получим

$$v^2 - vz - z^2 + 5 = 0, \quad (30)$$

а также осуществляя поворот осей $0v$ и $0z$, получим, что $\tan 2\beta = -\frac{1}{2}$ или $\beta = -0,2318238(RAD)$, то есть $\beta = -14^{\circ}45'30,1''$. Приводя уравнение (30) к каноническому виду, получим

$$-\frac{(v')^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{\varphi-0,5}}\right)^2} + \frac{(z')^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{\varphi-0,5}}\right)^2} = 1. \quad (31)$$

Вновь получаем равнобочную гиперболу с асимптотами $v' = \pm z'$ и полуосями $a = b = \sqrt{\frac{5}{\varphi - 0,5}}$, повернутыми на $\beta = 14^{\circ}45'30,1''$ по часовой стрелке.

Следовательно, геометрическое место точек, связывающее синус Люка и косинус Люка есть гиперболы (30) или (31), что графически представлено в таблице 2 в соответствующей клетке, где значения $z = clt$ всегда принадлежит полуинтервалу $[0, \infty)$, поэтому все значения v рассматриваются на полуплоскости, состоящей из первого и четвертого квадрантов.

Например: $v = 29$; $asl29 = 4 = y$; $z = 18$; $acl18 = 4 = y$ имеем
 $29^2 - 29 \cdot 18 - 18^2 + 5 = 0$;

или

$$841 - 522 - 324 + 5 = 0;$$

$$846 - 846 = 0; 0 \equiv 0.$$

3. Взаимосвязь между обратным синусом Фибоначчи $y = asfx$ и обратным косинусом Люка $y = aclz$, то есть (16) и (22):

$$\frac{x\sqrt{5} + \sqrt{5x^2 + 4}}{2} = \frac{z + \sqrt{z^2 - 4}}{2},$$

$$(x\sqrt{5} - z)^2 = (\sqrt{z^2 - 4} - \sqrt{5x^2 + 4})^2;$$

$$5x^2 - 2xz\sqrt{5} + z^2 = z^2 - 4 - 2\sqrt{(z^2 - 4)(5x^2 + 4)} + 5x^2 + 4;$$

$$xz\sqrt{5} = \sqrt{(z^2 - 4)(5x^2 + 4)};$$

$$z^2 - 5x^2 = 4; \quad (32)$$

или

$$\frac{z^2}{(2)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1. \quad (33)$$

Итак, геометрическим местом точек объединяющим обратный синус Фибоначчи и обратный косинус Люка есть неравносторонняя гиперболы с полуосями $a = 2$ и $b = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и асимптотами $x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}z$, что графически представлено в таблице 2 в соответствующей клетке.

4. Взаимосвязь между обратным косинусом Фибоначчи $y = acfu$ и обратным синусом Люка $y = aslv$, то есть (18) и (20):

$$\frac{u\sqrt{5} + \sqrt{5u^2 - 4}}{2\varphi} = \frac{v + \sqrt{v^2 + 4}}{2},$$

или, выполнив аналогичные преобразования, как в предыдущем пункте, получим

$$5u^2 - v^2 - 4 = 0, \quad (34)$$

или

$$\frac{u^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} - \frac{v^2}{(2)^2} = 1, \quad (35)$$

Следовательно, геометрическим местом точек взаимосвязи обратного косинуса Фибоначчи и обратного синуса Люка есть также неравносторонняя гиперболы с асимптотами $u = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}v$, и полуосями $a = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $b = 2$, график которой представлен в таблице 2 в соответствующей клетке.

5. Взаимосвязь между обратным синусом Фибоначчи $y = asfx$ и обратным синусом Люка $y = aslv$, то есть (16) и (20):

$$\frac{x\sqrt{5} + \sqrt{5x^2 + 4}}{2} = \frac{v + \sqrt{v^2 + 4}}{2\varphi},$$

$$\varphi(x\sqrt{5} + \sqrt{5x^2 + 4}) = (v + \sqrt{v^2 + 4});$$

$$(\varphi x\sqrt{5} - v)^2 = (\sqrt{v^2 + 4} - \sqrt{5x^2 + 4})^2;$$

$$[\varphi v x\sqrt{5} + 2(\varphi^2 + 1)]^2 = \varphi^2(5v^2x^2 + 20x^2 + 4v^2 + 16).$$

Учитывая, что $\varphi^2 + 1 = \varphi\sqrt{5}$, получим общее уравнение гиперболы:

$$5x^2 - 5xv + v^2 - 1 = 0. \quad (36)$$

Выполняя поворот осей, аналогично предыдущим случаям, с помощью формул (25) найдем угол поворота:

$$\tan 2\gamma = -\frac{5}{4}, \quad \gamma = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right) \approx -0,448027692(\text{RAD}),$$

то есть

$$\gamma = -25,670096(\text{DEG}) = -28^\circ 31' 20,38''.$$

Это соответствует повороту осей системы координат по часовой стрелке и сведением уравнения (36) к каноническому виду гиперболы с полуосями $a = 0,40155908$ и $b = 2,227379434$:

$$\frac{(x')^2}{(0,40155908)^2} - \frac{(v')^2}{(2,227379434)^2} = 1, \quad (37)$$

график которой представлен в таблице 2 в соответствующей клетке.

6. Взаимосвязь же между обратным косинусом Фибоначчи $y = \text{acfv}$ и обратным косинусом Люка $y = \text{aclz}$, то есть (18) и (22), найдем, выполнив преобразования, аналогичные сделанным в предыдущем пункте, что соответствует геометрическому месту точек их взаимосвязи, то есть уравнению гиперболы с полуосями $a = 2,227379434$ и $b = 0,40155908$

$$z^2 - 5uz + 5u^2 + 1 = 0, \quad (38)$$

или производя поворот осей координат на угол $\eta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{5}{4} = 0,448027692(\text{RAD})$, то есть $\eta = 28^\circ 31' 20,38''$ против часовой стрелки, получим каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{(z')^2}{(2,227379434)^2} - \frac{(u')^2}{(0,40155908)^2} = 1, \quad (39)$$

график которой представлен в таблице 2 в соответствующей клетке.

Из графика видно, что линия взаимосвязей обеих ветвей расположена в первом квадранте, поскольку обе функции являются четными.

Аналогичные результаты получаются и для соответствующих пар функций при $x < 0$, $u < 0$, $v < 0$ и $z < 0$, то есть для следующих пар соотношений (17) и (19); (21) и (23); (19) и (21); (17) и (21); (19) и (23).

Таким образом, для соответствующих значений k , согласно формулам (5), (6), (7), (8), полученные геометрические места точек (24), (30), (32), (34), (36) и (38) определяют их взаимные связи, что позволяет определить переход от одной последовательности чисел к другой и обратно.

Выводы

Рассматривая структуру взаимосвязи гиперболических функций Фибоначчи и функций Люка (11) – (14) на плоскости, получаем, что, если оси координат соответствуют одной из пар функций, то они представляют собой уравнение взаимосвязей, выражение которого представлено на пересечении их

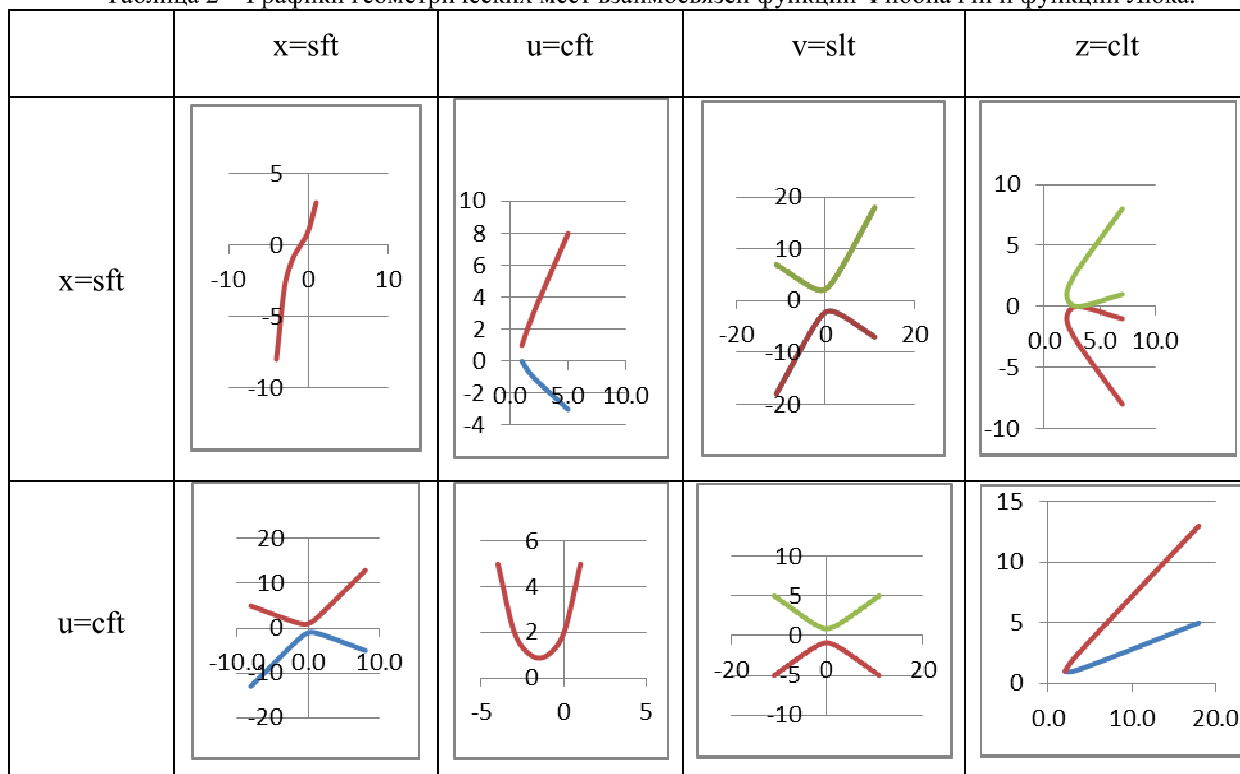
строк и столбцов. Предложенный подход к определению взаимосвязей функций Фибоначчи и функций Люка для заданного значения аргумента t позволяет моделировать взаимоконтроль как непрерывных, так и дискретных сигналов, воспроизводящих определенные процессы в соответствующих системах координат, определяемых из таблицы 1.

Таблица 1 – Определение взаимосвязей функций Фибоначчи функций Люка между собой

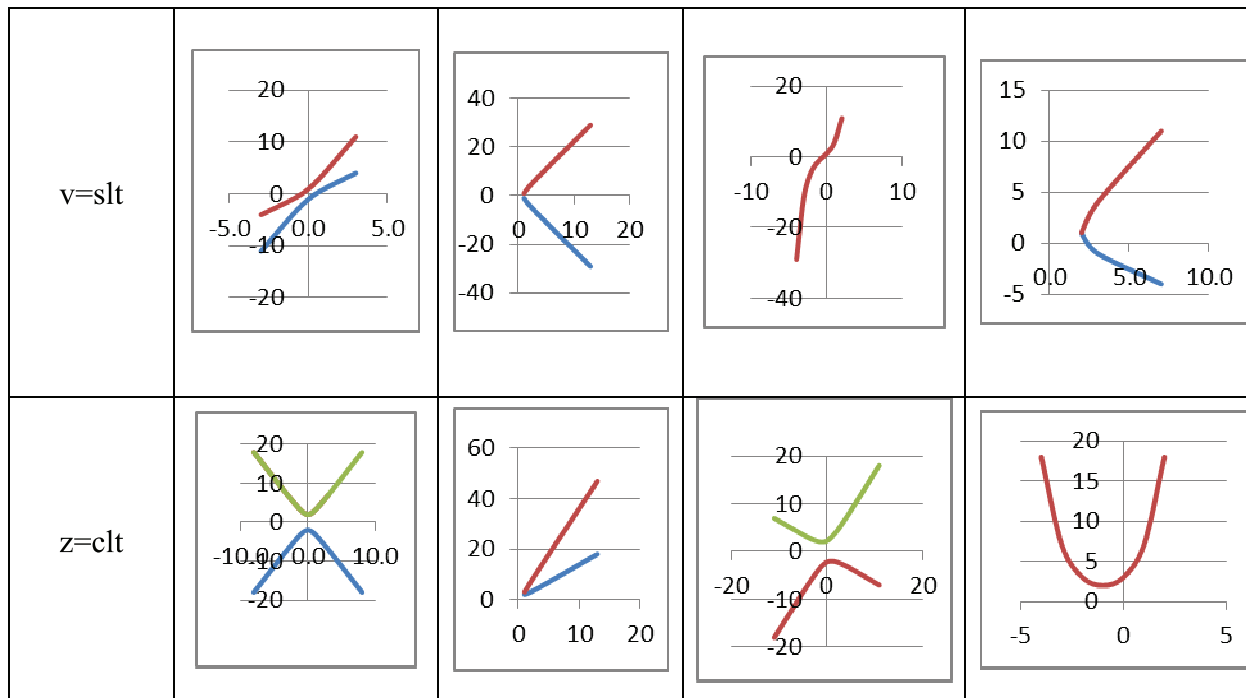
	x=sft	u=cft	v=slt	z=clt
x=sft	1	$\frac{-u \pm \sqrt{5u^2 - 4}}{2}$	$\frac{5v \pm \sqrt{5v^2 + 20}}{10}$	$\pm \frac{\sqrt{z^2 - 4}}{\sqrt{5}}$
u=cft	$\frac{x \pm \sqrt{5x^2 + 4}}{2}$	1	$\pm \frac{\sqrt{v^2 + 4}}{\sqrt{5}}$	$\frac{5z \pm \sqrt{5z^2 - 20}}{10}$
v=slt	$\frac{5x \pm \sqrt{5x^2 + 4}}{2}$	$\pm \sqrt{5u^2 - 4}$	1	$\frac{z \pm \sqrt{5z^2 - 20}}{2}$
z=clt	$\pm \sqrt{5x^2 + 4}$	$\frac{5u \pm \sqrt{5u^2 - 4}}{2}$	$\frac{-v \pm \sqrt{5v^2 + 20}}{2}$	1

Эти системы реализуют параметрический подход к определению геометрических мест точек взаимосвязей функций Фибоначчи и функций Люка (табл. 2), а для их целочисленных аргументов соответствующие пары последовательностей чисел Фибоначчи (1^I), (1^{II}) и чисел Люка (2^I) и (2^{II}). Из таблицы 2 также видно как происходит трансформация графика гиперболы на две пары плоскостей и первой четверти плоскости.

Таблица 2 – Графики геометрических мест взаимосвязей функций Фибоначчи и функций Люка.



Продовження табл. 2



Надеемся, эти результаты будут интересны лицам, которые изучают аналитическую геометрию при анализе систем координат, задаваемых в параметрической форме. И, наконец, переходя к обозначениям функций Фибоначчи и функций Люка в их изначальном представлении, получим, что:

$$cf^2t - sf^2t - sft \cdot cft = 1, cl^2t - sl^2t - slt \cdot clt = 5,$$

$$cl^2t - 5sf^2t = 4, 5cf^2t - sl^2t = 4,$$

$$sl^2t + 5cf^2t - 5sft \cdot cft = 1, 5clt \cdot cft - 5cf^2t - cl^2t = 1,$$

которые дают возможность моделировать контроль как цифровых, так и аналоговых сигналов приемо-передающих устройств.

В случае же непрерывных сигналов, моделируемых с помощью соотношений (11) – (14), появляется возможность их взаимоконтроля, что позволит обеспечить высокую надежность приемо-передающих устройств.

Литература

1. Азаров О.Д. Основы теории аналого-цифрового перетворення на основі надлишкових позиційних систем числення. Монографія. — Вінниця: УНІВЕРСУМ, 2004. — 260 с.
2. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. — М.: Наука, 1978, 144 с.
3. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи / Докл. НАН Украины. — 1993, Вып. 7. — С. 9–14.
4. Ильин В.А., Поздняк З.Г. Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1969, 232 с.

УДК 621.77

В. О. КРАЄВСЬКИЙ., С. О. КРАЄВСЬКИЙ., О. В. МИХАЛЕВИЧ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАКЛЮЧНОЇ СТАДІЇ ПРОЦЕСУ ЗГИНАННЯ

Анотація: У роботі розроблена математична модель заключної стадії процесу згинання смуги змінної ширини й товщини матрицею й пуансоном, які мають радіуси закруглень, співрозмірні з відстанню між ними. На основі моделі запропонований алгоритм, що дозволяє визначити точки дотику смуги до матриці й пуансону та рівняння нейтральної поверхні смуги. Алгоритм реалізований у математичному додатку Maple.

Аннотация: В работе разработана математическая модель заключительной стадии процесса сгибания полосы переменной ширины и толщины матрицей и пуансоном, которые имеют радиусы закруглений, соизмеримые с расстоянием между ними. На основе модели предложен алгоритм, позволяющий определять точки касания полосы к матрице и пуансону и уравнение нейтральной поверхности полосы. Алгоритм реализован в математическом приложении Maple.

Abstract: The article is devoted to the development of the mathematical model of the plate with variable breadth and thickness final stage of flexure by lower die and male mold which have bending radius, commensurable with distance between them. On base of the mathematical model the algorithm, which permits to determine contact point of plate with lower die and male mold and the equation of the plate cambered axle, is offered. The algorithm is implemented in mathematical application Maple.

Ключові слова: листове штампування, зусилля деформування, нейтральна поверхня, напружено-деформований стан, метод стрільби.

Вступ

У випадку, коли проектується оснастка для листового штампування на існуюче обладнання, яке призначене для виконання іншого виду робіт і має незначний діапазон робочого зусилля [1], важливим є точне визначення зусилля деформування. При визначенні зусилля деформування при операціях згинання здебільшого радіусами закруглень матриці та пуансона або нехтували або нейтральну поверхню (на якій не діють напруження розтягу і стиску, фактично нейтральна поверхня – це серединна поверхня) смуги апроксимували прямою лінією [2,3]. Але у випадку, коли відстань між матрицею та пуансоном співрозмірна з їх радіусами закруглень, то це може призвести до значної похибки. Похибка викликана невірним визначенням точок прикладення зусилля деформування. Це в свою чергу впливає як на величину повного зусилля деформування так і на його напрям, тобто на перерозподіл повного зусилля деформування на повздовжню та поперечну складові. Введемо до розгляду три стадії процесу згинання смуги (рис. 1). У початковій стадії радіус згинання смуги у точці дотику більший за радіус матриці. В основній стадії радіус згинання повністю визначається радіусом матриці, а пуансон діє на смугу по дотичній. На заключній стадії пуансон діє на смугу не по дотичній, а на кінець смуги.

Мета досліджень

Метою роботи є визначення нейтральної поверхні смуги на заключній стадії операції згинання матрицею та пуансоном, що мають радіуси закруглень, які співрозмірні із відстанню між ними.

Задачі

Відповідно до мети досліджень формулюються такі задачі:

Побудувати математична модель заключної стадії процесу згинання смуги змінної ширини й товщини матрицею й пуансоном, які мають радіуси закруглень, співрозмірні з відстанню між ними.

На основі математичної моделі запропонувати алгоритм визначення нейтральної поверхні смуги на заключній стадії операції згинання.

Основна частина

Смуга товщиною s притиснена прижимом до матриці (рис. 1 та рис. 2). На вільний кінець смуги із зусиллям P діє пуансон. Введемо декартову систему координат, початок відліку якої знаходиться у точці виходу смуги з-під прижиму. Нехай поверхня матриці у вибраній системі координат описується рівнянням

$$m = m(x), \quad (1)$$

а поверхня Пуансона

$$p = p(x). \quad (2)$$

Смуга має змінні товщину та ширину. Залежність товщини s та ширини b заготовки від координати x запишемо у вигляді

$$s = s(x); \quad (3)$$

$$b = b(x). \quad (4)$$

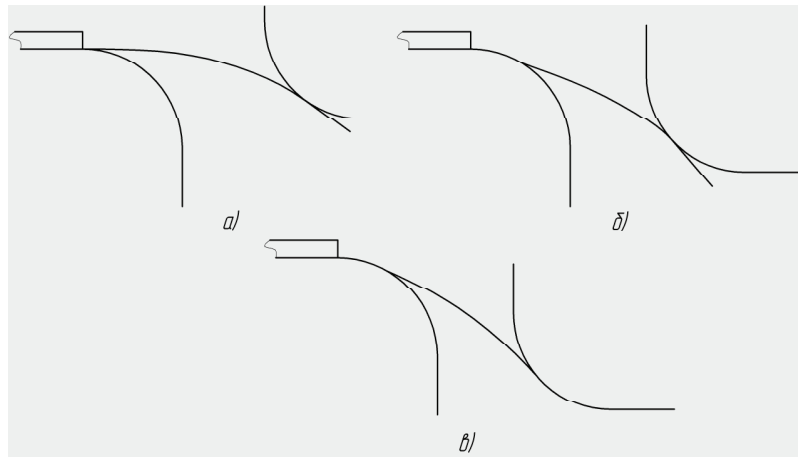


Рисунок 1 – Стадії процесу згинання

Знаючи розподілення напружень по товщині заготовки, можна визначити величину згинального моменту, що потрібний для здійснення згинання на необхідний радіус.

Частину смуги, що згинається, можна розділити на дві ділянки. На першій ділянці напружено-деформований стан смуги пружно-пластичний, на другій – пружний. Точка D є межею між цими двома ділянками.

Розподілення тангенціальних напружень σ без врахування зміцнення по товщині заготовки на ділянці AD , де смуга має пластичні деформації, представлено на рис. 3.

Знайдемо момент, що створюється тангенціальними напруженнями відносно точки O :

$$\frac{M}{b(x)} = 2 \cdot \int_0^{s(x)/2} \sigma \delta \cdot d\delta = 2 \cdot \left[\int_0^a \varepsilon E \delta \cdot d\delta + \int_a^{s(x)/2} \sigma_m \delta \cdot d\delta \right]. \quad (5)$$

Легко показати, що

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\rho_{cp}}; \quad (6)$$

$$a = \frac{\sigma_m \cdot \rho_{cp}}{E}, \quad (7)$$

де δ – відстань до нейтральної поверхні; ρ_{cp} – радіус згинання нейтральної поверхні; σ_m – границя текучості; E – модуль пружності.

Тоді

$$M = b(x) \cdot \left[\frac{\sigma_m \cdot s(x)^2}{4} - \frac{\sigma_m^3 \cdot \rho_{cp}^2}{3 \cdot E^2} \right]. \quad (8)$$

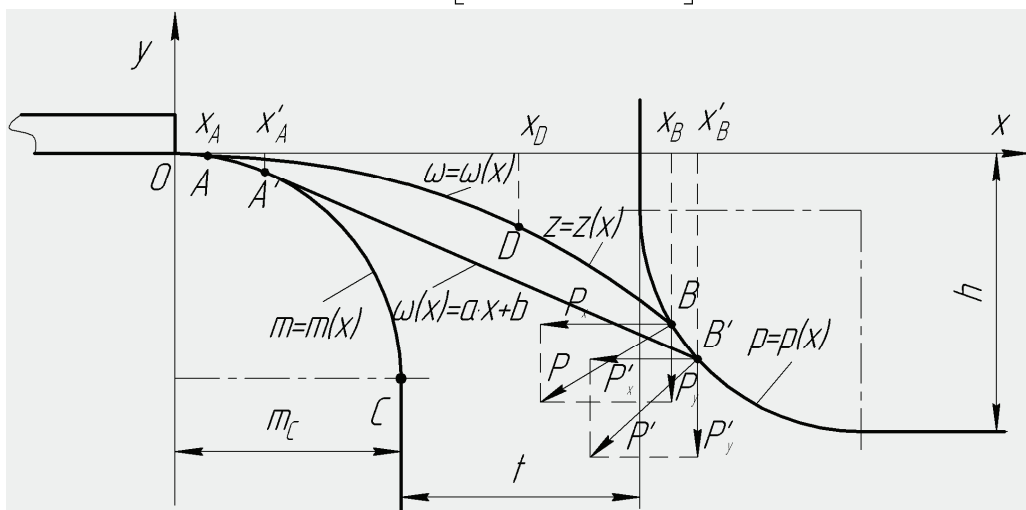


Рисунок 2 – Стадія завершення процесу згинання смуги

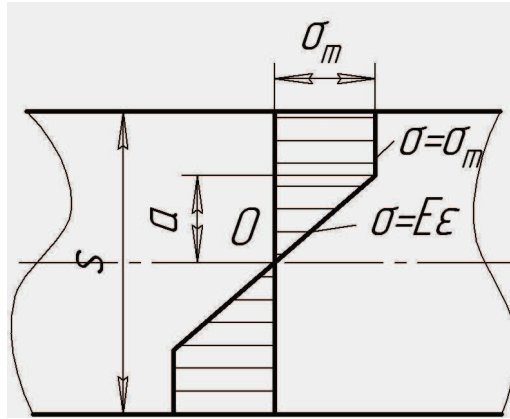


Рисунок 3 – Розподілення тангенціальних напружень на ділянці пружно-пластичних деформацій

У точці A радіус ρ_{cp} визначається радіусом заокруглення матриці R_M

$$\rho_{cp} = R_M(x_A) = \frac{\left[1 + \left(\frac{dm(x_A)}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{d^2 m(x_A) dx^2}, \quad (9)$$

тоді з формули (8) момент, який необхідний для згинання смуги по радіусу матриці, обчислюється за формулою

$$M_A = b(x_A) \cdot \left[\frac{\sigma_m \cdot s(x_A)^2}{4} - \frac{\sigma_m^3 \cdot R_M(x_A)^2}{3 \cdot E^2} \right]. \quad (10)$$

Загальний момент створюється двома складовими повного зусилля P . Осьова складова створює момент

$$M_1 = P_y \cdot (x_B - x_A). \quad (11)$$

Поперечна складова зусилля P створює момент

$$M_2 = P_x \cdot (m(x_A) - p(x_B)). \quad (12)$$

Враховуючи, що

$$P_x = \frac{P_y}{\operatorname{tg} \varphi} = -P_y \cdot \frac{dp(x_B)}{dx}, \quad (13)$$

то осьове зусилля, яке забезпечує момент, достатній для виникнення пластичних деформацій та згинання смуги на радіус $R_M(x_A)$, обчислюється за формулою

$$P_y = \frac{M_A}{x_B - x_A - \frac{dp(x_B)}{dx} (m(x_A) - p(x_B))}. \quad (14)$$

Для того, щоб визначити координати точок A та B , необхідно знати рівняння вигнутої осі смуги $\omega = \omega(x)$. З формули (8)

$$\rho_{cp} = \frac{\sqrt{3} \cdot E}{2 \cdot b(x) \cdot \sigma_m^2} \cdot \sqrt{b(x) \cdot \sigma_m \cdot (s(x)^2 \cdot \sigma_m \cdot b(x) - 4 \cdot M(x))}. \quad (15)$$

Відомо, що

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 \omega}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (16)$$

Тоді диференціальне рівняння зігнутої осі смуги при пружно-пластичних деформаціях запишемо у вигляді

$$\frac{\frac{d^2 \omega}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = - \frac{2 \cdot b(x) \cdot \sigma_m^2}{\sqrt{3} \cdot E \cdot \sqrt{b(x) \cdot \sigma_m \cdot [s(x)^2 \cdot \sigma_m \cdot b(x) - 4 \cdot M_{nl}(x)]}}, \quad (17)$$

де $M_{nl}(x)$ – згинальний момент, який діє у перерізі із координатою x , що належить ділянці пружно-пластичних деформацій, і обчислюється за формулою

$$M_{nl}(x) = P_y \cdot \left(x_B - x - \frac{dp(x_B)}{dx} (\omega(x) - p(x_B)) \right). \quad (18)$$

Підставивши (14) та (10) у (18) матимемо остаточний вираз для визначення згинального моменту $M_{nl}(x)$

$$M_{nl}(x) = \frac{M_A}{x_B - x_A - \frac{dp(x_B)}{dx} (m(x_A) - p(x_B))} \times \left(x_B - x - \frac{dp(x_B)}{dx} (\omega(x) - p(x_B)) \right). \quad (19)$$

Отже, для визначення рівняння зігнутої осі смуги і визначення точок x_A та x_B (тобто плеча прикладення сили), матимемо нелінійне диференціальне рівняння другого порядку. Початкові умови для розв'язання задачі Коші представимо у вигляді

$$\begin{cases} \omega(x_A) = m(x_A); \\ \frac{d\omega}{dx}(x_A) = \frac{dm}{dx}(x_A). \end{cases} \quad (20)$$

При введенні початкових умов вважали, що відстань між пуансоном і матрицею t набагато більша за товщину s .

Після точки D до точки B смуга буде мати лише пружні деформації. Знайдемо координати точки D , де проходить границя між частиною смуги, що має пружно-пластичні деформації, та частиною смуги, де деформації лише пружні. Тіло переходить з пружно-пластичного у пружний стан, коли у формулі (7) $a = \frac{s}{2}$. Тоді

$$\rho_{cp} = \frac{s \cdot E}{2 \cdot \sigma_m}. \quad (21)$$

Але згідно з (15) у точці D дорівнюватиме

$$\rho_{cp} = \frac{\sqrt{3} \cdot E}{2 \cdot b(x_D) \cdot \sigma_m^2} \times \sqrt{b(x_D) \cdot \sigma_m \cdot (s(x_D)^2 \cdot \sigma_m \cdot b(x_D) - 4 \cdot M_{nl}(x_D))}. \quad (22)$$

Отже маємо одне рівняння з одним невідомим x_D

$$\frac{s(x_D)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot b(x_D) \cdot \sigma_m} \times \sqrt{b(x_D) \cdot \sigma_m \cdot (s(x_D)^2 \cdot \sigma_m \cdot b(x_D) - 4 \cdot M_{nl}(x_D))}, \quad (23)$$

розв'язавши яке знаходимо координату точки D , в якій відбувається зміна напружено-деформованого стану смуги із пружно-пластичного у пружний.

Розподілення напружень у товщині смуги на ділянці DB зображено на рис. 4. Тоді диференціальне рівняння осі смуги матиме вигляд [4]

$$\frac{\frac{d^2 z}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{12 \cdot M_{np}(x)}{E \cdot s(x)^3 \cdot b(x)}, \quad (24)$$

де $M_{np}(x)$ – згинальний момент, який діє у перерізі із координатою x , що належить ділянці пружних деформацій, і обчислюється за формулою

$$M_{np}(x) = \frac{M_A}{x_B - x_A - \frac{dp(x_B)}{dx}(m(x_A) - p(x_B))} \times \left(x_B - x - \frac{dp(x_B)}{dx}(z(x) - p(x_B)) \right). \quad (25)$$

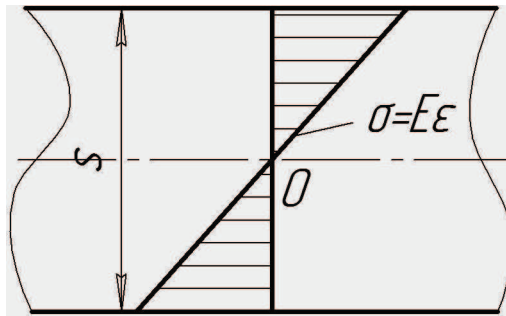


Рисунок 4 – Розподілення тангенціальних напружень на ділянці пружних деформацій

Оскільки положення точки D визначається як рівнянням (17), так і рівнянням (24), то початкові умови запишемо у вигляді

$$\begin{cases} z(x_D) = \omega(x_D); \\ \frac{dz(x_D)}{dx} = \frac{d\omega(x_D)}{dx}. \end{cases} \quad (26)$$

На кінцевій стадії процесу згинання, коли вільний кінець смуги закінчується, пуансон діє на смугу не по дотичній, а точкою контакту пуансона із смугою є кінець смуги. Отже необхідно ввести умову, яка накладає обмеження на довжину вільного кінця смуги l . Тобто, додатковими умовами для визначення невідомих параметрів x_A та x_B у рівняннях (17) та (24) слугуватимуть вирази

$$\begin{cases} z(x_B) = p(x_B); \\ l = \int_0^{x_A} \sqrt{\left(\frac{dm}{dx}\right)^2 + 1} dx + \int_{x_A}^{x_D} \sqrt{\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 + 1} dx + \int_{x_D}^{x_B} \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 1} dx. \end{cases} \quad (27)$$

Отже, маємо у загальному вигляді задачу на власні значення – систему двох диференціальних рівнянь другого порядку, у яких права частина залежить від параметрів x_A та x_B , значення яких невідомі і повинні бути визначені з самої задачі

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \omega}{dx^2} = - \frac{2b(x) \cdot \sigma_m^2}{\sqrt{3E} \sqrt{b(x) \cdot \sigma_m \cdot [s(x)^2 \cdot \sigma_m \cdot b(x) - 4M_{nz}(x)]}}; \\ \left[1 + \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \\ \omega(x_A) = m(x_A); \\ \frac{d\omega}{dx}(x_A) = \frac{dm}{dx}(x_A); \\ \frac{d^2 z}{dx^2} = - \frac{12 \cdot M_{np}(x)}{E \cdot s(x)^3 \cdot b(x)}; \\ \left[1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \\ z(x_D) = \omega(x_D); \\ \frac{dz(x_D)}{dx} = \frac{d\omega(x_D)}{dx}; \\ z(x_B) = p(x_B); \\ l = \int_0^{x_A} \sqrt{\left(\frac{dm}{dx} \right)^2 + 1} dx + \int_{x_A}^{x_D} \sqrt{\left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 + 1} dx + \int_{x_D}^{x_B} \sqrt{\left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + 1} dx. \end{array} \right. \quad (28)$$

Один з методів, за допомогою якого можна розв'язати цю задачу, є метод стрільби. Його рекомендується застосовувати до задачі на власні розв'язки, яка містить один параметр. Ми ж маємо справу із двома параметрами. Тому для того, щоб можна було застосовувати метод стрільби, необхідно провести оцінку інтервалів зміни параметрів. Параметр x_A належить інтервалу $(0; x'_A)$, а параметр x_B – $(m_C + t; x'_B)$. Точки x'_A та x'_B знайдемо, апроксимувавши рівняння осі смуги прямою лінією, тобто представити $\omega(x) = a \cdot x + b$ (див. рис. 1). Тоді задача (28) запишеться у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(x) = a \cdot x + b; \\ \omega(x'_A) = m(x'_A); \\ \frac{d\omega}{dx}(x'_A) = \frac{dm}{dx}(x'_A); \\ \omega(x'_B) = p(x'_B); \\ l = \int_0^{x'_A} \sqrt{\left(\frac{dm}{dx} \right)^2 + 1} dx + \sqrt{(x'_B - x'_A)^2 + (m(x'_A) - p(x'_B))^2}. \end{array} \right. \quad (29)$$

Маємо систему з 4-х нелінійних рівнянь із 4-ма невідомими, яку розв'язуємо відомими методами, наприклад методом Ньютона. Розв'язавши цю систему, ми знайдемо точки x'_A та x'_B , які є правими границями інтервалів зміни параметрів x_A та x_B .

Алгоритм застосування методу стрільби для розв'язання задачі (28) такий. Спочатку ми знаходимо інтервали зміни параметрів x_A та x_B , розв'язавши систему (29). Потім отримані інтервали ділимо на N проміжків. Знаходимо крок зміни параметрів

$$h_A = \frac{x'_A - 0}{N}; \quad h_B = \frac{x'_B - m_C - t}{N}. \quad (30)$$

У циклі змінюємо параметр x_A від 0 до x'_A із кроком h_A . У вкладеному циклі змінюємо параметр x_B від $m_C + t$ до x'_B із кроком h_B . На кожній ітерації знаходимо рівняння осі смуги на ділянці AD , розв'язавши задачу Коші відомими методами, наприклад, методом Рунге-Кутта,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \omega}{dx^2} = - \frac{2b(x) \cdot \sigma_m^2}{\sqrt{3E} \sqrt{b(x) \cdot \sigma_m \cdot [s(x)^2 \cdot \sigma_m \cdot b(x) - 4M_{nn}(x)]}}; \\ \left[1 + \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \\ \omega(x_A) = m(x_A); \\ \frac{d\omega}{dx}(x_A) = \frac{dm}{dx}(x_A). \end{array} \right. \quad (31)$$

Далі знаходимо координати точки D , розв'язавши рівняння (23) відносно x_D . Потім знаходимо рівняння осі смуги на ділянці DB , розв'язавши наступну задачу Коші

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 z}{dx^2} = - \frac{12 \cdot M_{np}(x)}{E \cdot s(x)^3 \cdot b(x)}; \\ \left[1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \\ z(x_D) = \omega(x_D); \\ \frac{dz(x_D)}{dx} = \frac{d\omega(x_D)}{dx}. \end{array} \right. \quad (32)$$

Отримасмо $N \times N$ розв'язків задачі Коші (32). Із цих розв'язків обираємо той, який найкраще відповідає додатковим умовам (27). Нехай смуга має постійні товщину та ширину, тобто $b(x) = const$ та $s(x) = const$; радіуси заокруглень матриці та пуансона постійні і дорівнюють R_M та R_n відповідно. Отже, матимемо такі рівняння у вибраній декартовій системі координат

$$\left\{ \begin{array}{l} b(x) = b; \\ s(x) = s; \\ m(x) = \sqrt{R_M^2 - x^2} - R_M; \\ p(x) = -\sqrt{R_n^2 - (x - t - R_M - R_n)^2} - h + R_n. \end{array} \right. \quad (33)$$

Тоді задача (28) набуде дещо спрощеного вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \omega}{dx^2} = - \frac{2 \cdot b \cdot \sigma_m^2}{\sqrt{3} \cdot E \cdot \sqrt{b \cdot \sigma_m \cdot [s^2 \cdot \sigma_m \cdot b - 4 \cdot M_{nn}(x)]}}; \\ \left[1 + \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \\ \omega(x_A) = \sqrt{R_M^2 - x_A^2} - R_M; \\ \frac{d\omega}{dx}(x_A) = - \frac{x_A}{\sqrt{R_M^2 - x_A^2}}; \\ \frac{d^2 z}{dx^2} = - \frac{12 \cdot M_{np}(x)}{E \cdot s^3 \cdot b}; \\ \left[1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \\ z(x_D) = \omega(x_D); \\ \frac{dz(x_D)}{dx} = \frac{d\omega(x_D)}{dx}; \\ z(x_B) = -\sqrt{R_n^2 - (x_B - t - R_M - R_n)^2} - h + R_n; \\ l = R \cdot \arcsin \frac{x_A}{R} + \int_{x_A}^{x_D} \sqrt{\left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2} + 1 dx + \int_{x_D}^{x_B} \sqrt{\left(\frac{dz}{dx} \right)^2} + 1 dx.. \end{array} \right. \quad (34)$$

Запропонований алгоритм розв'язання задачі (34) був реалізований у математичному додатку Maple. Результати розрахунку показані на рис. 5.

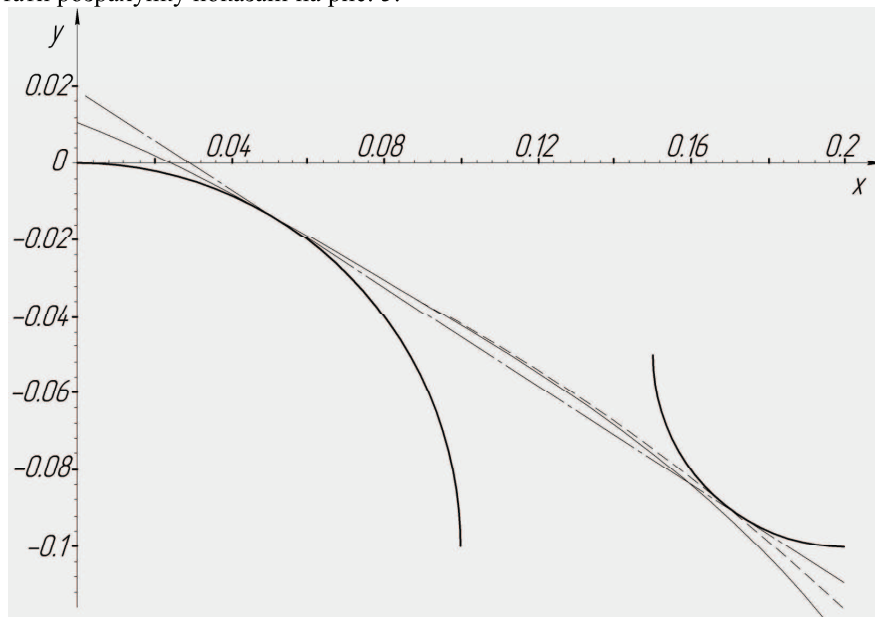


Рисунок 5 – Розрахунок положення нейтральної поверхні під час згинання: суцільна лінія – положення при пружно-пластичних деформаціях; штрихова лінія – положення при пружних деформаціях; штрихпунктирна лінія – апроксимація нейтральної поверхні прямою

Висновки

1. Розроблена математична модель заключної стадії процесу згинання смуги змінної ширини й товщини матрицею й пуансоном, які мають радіуси закруглень, співрозмірні з відстанню між ними. У результаті отримали задачу на власні значення – систему двох нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, у яких права частина залежить від параметрів, значення яких невідомі і повинні бути визначені з самої задачі.

2. Запропоновано алгоритм розв'язання отриманої задачі на власні значення, що дозволяє визначати точки дотику смуги до матриці й пуансону й рівняння нейтральної поверхні смуги. В основу алгоритму покладений модифікований, з огляду на фізику процесу, що розглядається, метод стрільби.

3. Для задачі згинання смуги із сталюю товщиною та шириною матрицею і пуансоном із сталими радіусами заокруглень алгоритм реалізований у математичному додатку Maple.

Література

1. Матвійчук В. А. Розробка маловідходних процесів формування тонкостінних циліндричних деталей / В. А. Матвійчук, В. М. Михалевич, В. О. Краєвський // Удосконалення процесів і обладнання обробки тиском в металургії і машинобудуванні (Донбаська державна машинобудівна академія). – Краматорськ: ДДМА. – 2004. – С. 281-286.

2. Попов Е. А. Основы теории листовой штамповки / Е. А. Попов. – М.: Машиностроение, 1977. – 278 с.

3. Зубцов М. Е. Листовая штамповка / М. Е. Зубцов. – Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1980. – 432 с.

4. Писаренко Г. С. Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко. – К.: Вища школа, 1986. – 775 с.

Відомості про авторів

Краєвський Володимир Олександрович – к.т.н., доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, вул. Хмельницьке шосе 95, м. Вінниця, Україна, 21021, тел.: (0432)598591, vkraevsky@mail.ru.

Краєвський Станіслав Олександрович – магістрант кафедри ПЦБ, Вінницький національний технічний університет, вул. Хмельницьке шосе 95, м. Вінниця, Україна, 21021, staskrailas@meta.ua.

Михалевич Олексій Володимирович – студент кафедри ЗІ, Вінницький національний технічний університет, вул. Хмельницьке шосе 95, м. Вінниця, Україна, 21021.

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 004.056 : 004.424.47

В. А. ЛУЖЕЦЬКИЙ, Ю. В. БАРИШЕВ

МЕТОДИ БАГАТОКАНАЛЬНОГО КЕРОВАНОГО ХЕШУВАННЯ ДЛЯ КОМП'ЮТЕРНОЇ КРИПТОГРАФІЇ

Вступ

Повторюваність перетворень, що використовуються в хешуванні, дозволяє зловмиснику виконувати попередню підготовку до атак [1] та будувати мультиколізії [2], що віддаляє всі ітеративні хеш-функції від ідеальної за показниками стійкості до пошуку колізій та прообразів. Саме тому для протидії таким атакам необхідні принципові зміни – зміни у самій концепції хешування, а не в перетвореннях, за допомогою яких це хешування реалізується. Вирішення цієї проблеми може бути здійснено шляхом реалізації концепції керованого хешування [3].

Водночас тенденція до розпаралелення обчислень в комп'ютерних системах знайшла своє відображення й у комп'ютерній криптографії, тому сучасне хешування повинно бути природним для платформ, що використовують паралельні обчислювальні ядра, тобто бути багатоканальним. При цьому багатоканальність у хешуванні підвищує вразливість хеш-функцій до спеціалізованих атак, що використовують мультиколізії [2], тому хеш-функції, що будуть отримані в результаті реалізації концепції керованого хешування, повинні бути багатоканальними та водночас стійкими до мультиколізій для того, щоб відповідати сучасним вимогам до процесу хешування.

У зв'язку з вищевикладеним метою даного дослідження є підвищення стійкості багатоканального керованого хешування за рахунок розробки нових методів та конструкцій хешування.

Для досягнення мети необхідно розв'язати такі задачі:

- аналіз відомих атак на багатоканальне хешування та методів протидії ним;
- аналіз методів формування вектора керування у керованому хешуванні та його використання при розпаралеленні;
- розробка методів стійкого багатоканального керованого хешування;
- наведення прикладів конструкцій, розроблених відповідно до запропонованих методів.

Аналіз атак, що використовують властивості конструкцій хешування, та методів протидії ним

Першою атакою на багатоканальне хешування стала атака Жукса. Об'єктом цієї атаки є конструкція "каскадування" хеш-функцій [4], яка передбачала паралельне і незалежне обчислення в кожному з каналів вихідного хеш-значення за допомогою конструкції Меркля-Дамгаарда. Тобто для двох каналів ця конструкція мала такий вигляд:

$$\begin{cases} h_i^{(1)} = f^{(1)}(h_{i-1}^{(1)}, m_i) \\ h_i^{(2)} = f^{(2)}(h_{i-1}^{(2)}, m_i) \end{cases} \quad (1)$$

де $h_i^{(j)}$ – проміжне хеш-значення, визначене після i -ї ($i = \overline{1, l}$) ітерації у j -му каналі ($j = \overline{1, q}$); $f^{(j)}$ – функція ущільнення, що реалізується j -м каналом; m_i – i -й блок даних.

Вихідне хеш-значення пропонувалось отримувати шляхом конкатенації вихідних хеш-значень кожного каналу [4], тобто для прикладу (1) вихідним хеш-значенням буде $h_i^{(1)} \parallel h_i^{(2)}$ (де " \parallel " – позначення конкатенації). Атака Жукса передбачала знаходження мультиколізій для таких конструкцій, тобто для кожного блоку m_i Жукс знаходив інший m_i^* , такий що виконувалась рівність:

$$h_i^{(1)} = f^{(1)}(h_{i-1}^{(1)}, m_i) = f^{(1)}(h_{i-1}^{(1)}, m_i^*) \quad (2)$$

Таким чином, для повідомлення довжиною l блоків даних побудувалося 2^l таких колізій за $l \cdot 2^{n/2}$ ітерацій хешування. Цю сукупність колізій Жукс назвав мультиколізією. Існує ймовірність, якою не можна знехтувати і яка зростає зі збільшенням l того, що серед знайдених колізій для першого каналу знайдеться хоча б одна, яка породжує колізію й в іншому каналі [2].

Після появи атаки Жукса, закладені ним підходи були узагальнені та розвинуті, зокрема, в роботі [2] наводиться приклад для побудови мультиколізій для деревоподібних конструкцій хешування та для

хеш-функцій, які передбачають перестановку блоків даних для кожного з каналів хешування. Отже, з'явився клас атак, загальних для більшості ітеративних хеш-функцій, який використовував саме цю властивість ітеративності.

Однією з перших спроб протидії мультиколізіям стала конструкція подвійного каналу, запропонована Штефаном Люксом у роботі [5]. Ця конструкція передбачала взаємозв'язок каналів хешування після кожної ітерації, реалізований у такий спосіб [5]:

$$\begin{cases} h_i^{(1)} = f(h_{i-1}^{(1)}, h_{i-1}^{(2)} \parallel m_i) \\ h_i^{(2)} = f(h_{i-1}^{(2)}, h_{i-1}^{(1)} \parallel m_i) \end{cases} \quad (3)$$

Після останньої ітерації передбачався додатковий раунд для отримання вихідного хеш-значення, що реалізує таке перетворення [5]:

$$h = f(h', h_i^{(1)} \parallel h_i^{(2)} \parallel \bar{0}), \quad (4)$$

де h' – частина вектора ініціалізації; $\bar{0}$ – рядок нулів, довжиною $\|m_i\| - n$ бітів ($\|m_i\|$ – довжина блока даних в бітах).

Недоліком методу Люкса, який описується формулами (3) та (4), є подвійні витрати обчислювальних ресурсів порівняно з одноканальним хешуванням, оскільки останнє перетворення (4) фактично зменшує вихідне хеш-значення, отримане після завершення l -го раунду. Відповідно, не зважаючи на стійкість конструкції подвійного каналу Люкса до мультиколізій, у цьому підході фактично нівелюється сенс розпаралелення процесу хешування – тобто маніпулювання із даними меншої розрядності та збільшення швидкості процесу.

Ще одним суттєвим недоліком реалізації ідеї Люкса є його бажання пристосувати запропоновану ним конструкцію до відомих хеш-функцій замість того, щоб розробляти нову авторську хеш-функцію на базі запропонованого ним підходу. Саме тому формула (3) передбачає "домішування" проміжного хеш-значення з іншого каналу до вхідних даних за допомогою конкатенації, що, в свою чергу, зменшує кількість бітів даних, що хешуються за один раунд, а тому збільшує тривалість процесу хешування. Крім того, перетворення (4) передбачає використання ще одного початкового заповнення, відповідно для двох каналів з вихідним значенням довжиною n бітів необхідно $3n$ бітів для вектора ініціалізації ($h_0^{(1)} \parallel h_0^{(2)} \parallel h'$), тобто вектор ініціалізації повинен бути втричі довшим, ніж у класичних конструкціях одноканального хешування з вихідним значенням такої самої довжини.

У роботі [6] було запропоновано методи, що узагальнюють та надають подальшого розвитку підходам Люкса, суть яких описується такою формулою:

$$\begin{cases} h_i^{(1)} = f^{(1)}(h_{i-1}^{(1)}, h_{i-1}^{(2)}, \dots, h_{i-1}^{(q)}, m_i) \\ h_i^{(2)} = f^{(2)}(h_{i-1}^{(1)}, h_{i-1}^{(2)}, \dots, h_{i-1}^{(q)}, m_i) \\ \dots \\ h_i^{(q)} = f^{(q)}(h_{i-1}^{(1)}, h_{i-1}^{(2)}, \dots, h_{i-1}^{(q)}, m_i) \end{cases} \quad (5)$$

Як результуюче хеш-значення хеш-функції конструкції (5) пропонується використовувати конкатенацію хеш-значень, отриманих у кожному з каналів $h_i^{(1)} \parallel h_i^{(2)} \parallel \dots \parallel h_i^{(q)}$ [6]. Оскільки за допомогою кожного каналу визначається частина хеш-значення довжиною n/q бітів, то довжина вектора ініціалізації становить n бітів, як і в одноканальному хешуванні. Водночас менша розрядність операндів у каналах хешування дозволяє швидше виконувати неприродні для обчислювальних платформ перетворення такі, як піднесення до степеня за модулем.

Крім узагальнення та удосконалення методу Люкса у роботі [6] пропонується новий підхід, який передбачає перестановки блоків даних в межах каналів та зчеплення кожного i -го блока даних з іншим, індекс якого залежить від i -го, що формалізується такою конструкцією:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_i^{(1)} = rand(m_i^{(1)}) \\ r_i^{(2)} = rand(m_i^{(2)}) \\ \dots \\ r_i^{(q)} = rand(m_i^{(q)}) \\ h_i^{(1)} = f^{(1)}\left(h_{i-1}^{(1)}, m_i^{(1)} * m_{i-r_i^{(1)}}^{(1)}\right) \\ h_i^{(2)} = f^{(2)}\left(h_{i-1}^{(2)}, m_i^{(2)} * m_{i-r_i^{(2)}}^{(2)}\right) \\ \dots \\ h_i^{(q)} = f^{(q)}\left(h_{i-1}^{(q)}, m_i^{(q)} * m_{i-r_i^{(q)}}^{(q)}\right) \end{array} \right. , \quad (6)$$

де $r_i^{(j)}$ – псевдовипадкове відхилення від номера поточного блока даних, що обробляється, яке отримують у j -му каналі; $rand(\cdot)$ – деяка функція генерування псевдовипадкових чисел; "*" – операція об'єднання двох операндів в один.

Основною перевагою підходу, що описується конструкцією (6), є незалежність каналів один від одного, а тому більша швидкість порівняно з конструкцією (5) [6].

Попри існування підходів стійкого багатоканального хешування в межах концепції ітеративного хешування, у науково-технічній літературі невідомі підходи стійкого розпаралелення в межах концепції керованого хешування, особливістю якого є наявність додаткового параметра (вектора керування), який необхідно враховувати при розпаралеленні. Перед тим як враховувати цей параметр необхідно проаналізувати способи його формування, оскільки від його зміни від ітерації до ітерації залежить вибір тієї чи іншої функції ущільнення, тобто сама реалізація концепції керованості. Якщо ж зломисник зможе передбачити правило зміни вектора керування, то для нього задача зламу матиме складність аналогічну ітеративному хешуванню.

Аналіз методів формування вектора керування

У методах хешування, що будуть розроблятися, кожен канал повинен реалізовувати кероване хешування, яке передбачає невизначеність для зломисника у раундовому перетворенні, відповідно, щоб це було реалізовано в повній мірі, кожен вектор керування повинен обиратися з однаковою ймовірністю. Крім того, якщо кожен канал буде реалізовувати своє раундове перетворення, то це збільшить невизначеність для зломисника у перетворенні, що здійснюється, оскільки йому необхідно буде розглядати всі варіанти комбінування перетворень у різних каналах. Якщо для кожного повідомлення будуть створюватися свої параметри перетворення, тоді зломиснику буде складніше виконати атаку з попередньою підготовкою, адже, змінивши блок повідомлення, він змінить також дії, які в подальшому будуть виконуватись над наступними блоками даних. При ключовому варіанті хешування вектор керування повинен бути закритим від зломисника, однак правила його формування можуть бути відкритими.

Отже, вектори керування повинні задовольняти таким вимогам.

1. Значення векторів керування обираються з однаковою ймовірністю.
2. Вектори керування мають бути різними для різних каналів.
3. Вектори керування мають бути різними для різних повідомлень.
4. Бути невідомим зломиснику (для ключового варіанта хешування).

Вектори керування можуть формуватися на основі:

- псевдовипадкових чисел;
- блоків даних;
- проміжних хеш-значень.

Використання різних для кожного каналу послідовностей псевдовипадкових чисел як векторів керування дозволить забезпечити вимоги 1, 2. Забезпечення вимоги 4 можна досягти, якщо початковий стан генераторів буде частиною ключової інформації (або всім ключем). Однак псевдовипадкові числа не залежать від даних, що хешуються, а тому послідовність векторів керування для кожного каналу буде однаковою для різних повідомлень, якщо ключ лишатиметься незмінним, отже цей варіант не відповідає вимозі 3.

Розподіл значень блоків даних, у загальному випадку, прагне до рівномірного закону, тому теоретично, при їх використанні як векторів керування, вони відповідають вимозі 1, хоча на практиці це

не обов'язково виконується. Використання значень блоків даних для формування векторів керування забезпечує виконання вимоги 3. Вимога 2 може бути забезпечена, якщо виконувати перестановки блоків даних для кожного каналу. Однак ключове хешування може бути реалізовано лише в певних специфічних задачах, коли дані, що хешуються, невідомі зловмиснику, що суттєво обмежує галузь застосування хешування, в якому блоки даних використовуються як вектори керування.

Розподіл проміжних хеш-значень, за визначенням, повинен прагнути до рівномірного закону, чим забезпечується виконання вимоги 1. Якщо кожен канал буде керуватися різними наборами проміжних хеш-значень, то й послідовність дій буде унікальною для кожного каналу, а отже можна забезпечити виконання вимоги 2. Відповідність вимозі 3 забезпечується тим, що проміжні хеш-значення залежать від блоків даних. Якщо вектор керування буде невідомим зловмиснику, що природно для хешування, то відповідність вимозі 4 буде забезпечена. Таким чином, проміжні хеш-значення задовольняють усім висунутим вище вимогам до векторів керування.

Методи багатоканального керованого хешування

Використаємо позначення, запропоноване в статті [6], для багатоканального хешування (Multi-Pipe Hashing) з деякими змінами – $MPHq(k, d, g, z)$, де q – кількість каналів, k – кількість каналів від проміжних хеш-значень яких залежить наступне хеш-значення j -го ($j = 1, 2, \dots, q$) каналу, d – кількість блоків даних, які беруть участь у формуванні хеш-значення у j -му каналі, g – режим хешування, ($g = 1$ – ітеративне некероване хешування, $g = 2$ – використовуються псевдовипадкові операнди, $g = 3$ – використовуються операції, що залежать від блоків даних, $g = 4$ – кероване хешування, $g = 0$ – можливий будь-який з режимів, $g = x_1 / x_2$ – комбінація режимів x_1 та x_2 , де $x_1, x_2 \in \{2; 3; 4\}$, $x_1 \neq x_2$), z – кількість псевдовипадкових чисел, що використовуються під час однієї ітерації.

Для підвищення стійкості методів хешування до мультиколізій пропонується використовувати залежність одного з каналів хешування від інших, однак на відміну від метода, що використовує проміжні хеш-значення з інших каналів як операнди (5), методи керованого хешування можуть використовувати їх як вектори керування. Для двох каналів метод хешування $MPH2(1, 1, 4, 0)$ передбачатиме обробку кожного блоку даних відповідно такої формули:

$$\begin{cases} h_i^{(1)} = f_{h_{i-1}^{(2)}}(h_{i-1}^{(1)}, m_i) \\ h_i^{(2)} = f_{h_{i-1}^{(1)}}(h_{i-1}^{(2)}, m_i) \end{cases} \quad (7)$$

Для узагальненого методу керованого хешування, що передбачає довільне хешування даних, можливі різні варіанти реалізації керування. Кожен з q каналів може використовувати $q - 1$ проміжне хеш-значення з інших каналів як вектор керування, оскільки не варто використовувати проміжні хеш-значення, отримані в даному каналі, для його керування. Останнє пояснюється тим, що коли проміжне хеш-значення використовується як вектор керування та операнд одночасно, то кількість значень, що можуть бути отримані в результаті хешування, обмежується, оскільки при певному проміжному хеш-значенні завжди будуть виконуватись лише певні операції.

Перевагою керованого хешування над ітеративним при багатоканальній реалізації є те, що зв'язок між каналами можна виконати "опосередковано", тобто метод, що параметрично описується $MPHq(1, 1, 4, 0)$, реалізує хешування за такою конструкцією:

$$\begin{cases} h_i^{(1)} = f_{v_i^{(1)}}(h_{i-1}^{(1)}, m_i) \\ h_i^{(2)} = f_{v_i^{(2)}}(h_{i-1}^{(2)}, m_i) \\ \dots \\ h_i^{(q)} = f_{v_i^{(q)}}(h_{i-1}^{(q)}, m_i) \end{cases}, \quad (8)$$

де $v_i^{(j)}$ – вектор керування, що використовується у j -му каналі під час i -ї ітерації та визначається за формулою:

$$v_i^{(j)} = \sum_{u=1, u \neq j}^q h_{i-1}^{(u)}. \quad (9)$$

Причому, замість додавання у формулі (9) може бути використана інша операція, що забезпечує рівномірний вплив кожного операнда на вихідне значення, наприклад побітове додавання.

Можливості багатоканального керованого хешування дозволяють виконувати керування за допомогою всіх $(q-1)$ каналів хешування. Однак для пришвидшення хешування можливий метод хешування, який би використовував як вектор керування проміжні хеш-значення з меншої кількості каналів за умови забезпечення "опосередкованого" впливу кожного каналу на інші. Це може бути досягнуто за рахунок того, що вплив одного каналу на інші відбувається певною затримкою на кілька ітерацій, що для задач, де відбувається хешування великих масивів даних, допустиме. Так, наприклад, для керування кожного каналу за допомогою одного каналу формулу (9) замінимо такою:

$$v_i^{(j)} = h_{i-1}^{(j-1)}. \quad (10)$$

Крім зв'язку проміжних хеш-значень за допомогою вектора керування, методи керованого хешування можуть використовувати підходи до підвищення стійкості, аналогічні запропонованим у роботі [6]. Так проміжні хеш-значення з декількох каналів можуть бути використані як операнди, якщо вони не використовуються в даному каналі для формування вектора керування. Наприклад, метод хешування $MPHq(2, 1, 4, 0)$ може мати вигляд:

$$\begin{cases} h_i^{(1)} = f_{h_{i-1}^{(q)}}(h_{i-1}^{(1)}, h_{i-1}^{(2)}, m_i) \\ h_i^{(2)} = f_{h_{i-1}^{(1)}}(h_{i-1}^{(2)}, h_{i-1}^{(3)}, m_i) \\ \dots \\ h_i^{(q)} = f_{h_{i-1}^{(q-1)}}(h_{i-1}^{(q)}, h_{i-1}^{(1)}, m_i) \end{cases}. \quad (11)$$

Очевидно, що до конструкції (11) можна і надалі додавати проміжні хеш-значення і як операнди, і як складові вектора керування. Однак додаткові операнди потребують додаткової обробки, що негативно впливає на швидкість хешування. Відповідно в низці випадків краще забезпечувати підвищення стійкості методу хешування до мультиколізій за допомогою зв'язку блоків даних. Метод хешування $MPHq(1, 2q, 3/4, q)$ буде мати вигляд аналогічний методу підвищення стійкості некерованого хешування (6):

$$\begin{cases} r_i^{(1)} = rand(m_i^{(1)}) \\ r_i^{(2)} = rand(m_i^{(2)}) \\ \dots \\ r_i^{(q)} = rand(m_i^{(q)}) \\ h_i^{(1)} = f_{h_{i-1}^{(q)}}(h_{i-1}^{(1)}, m_i^{(1)} * m_{i-r_i^{(1)}}^{(1)}) \\ h_i^{(2)} = f_{h_{i-1}^{(1)}}(h_{i-1}^{(2)}, m_i^{(2)} * m_{i-r_i^{(2)}}^{(2)}) \\ \dots \\ h_i^{(q)} = f_{h_{i-1}^{(q-1)}}(h_{i-1}^{(q)}, m_i^{(q)} * m_{i-r_i^{(q)}}^{(q)}) \end{cases}. \quad (12)$$

Існує низка задач, коли необхідно обчислювати хеш-значення для масиву даних, що динамічно генерується, тобто сторона, яка виконує хешування не має всіх вхідних даних в момент, коли необхідно починати процес. Щоб зробити використання хешування можливим для таких задач пропонується застосовувати для кожного каналу свою функцію генерування псевдовипадкових чисел та обирати псевдовипадкові відхилення в межах певного ковзного "вікна" даних фіксованої довжини. З урахуванням цього метод хешування $MPHq(1, 2q, 3/4, q)$, що використовує конструкцію (12), зміниться на $MPHq(1, 1+q, 3/4, q)$, а ітерація хешування матиме такий вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_i^{(1)} = rand^{(1)}(m_i) \bmod w \\ r_i^{(2)} = rand^{(2)}(m_i) \bmod w \\ \dots \\ r_i^{(q)} = rand^{(q)}(m_i) \bmod w \\ h_i^{(1)} = f_{h_{i-1}^{(q)}}(h_{i-1}^{(1)}, m_i * m_{i-r_i^{(1)}}) \\ h_i^{(2)} = f_{h_{i-1}^{(1)}}(h_{i-1}^{(2)}, m_i * m_{i-r_i^{(2)}}) \\ \dots \\ h_i^{(q)} = f_{h_{i-1}^{(q-1)}}(h_{i-1}^{(q)}, m_i * m_{i-r_i^{(q)}}) \end{array} \right. , \quad (13)$$

де w – кількість блоків даних, що потрапляють до "вікна" даних.

У конструкції (13) псевдовипадкові відхилення можуть приймати значення в меншому діапазоні чисел, однак за рахунок того, що "вікно" даних є ковзним, тобто після ітерації в його межі потрапляє новий блок даних, то всі блоки даних поєднуються у вигляді кільця. Обробка даних при реалізації конструкції буде починатися з $(w + 1)$ го блока даних, а завершуватиметься w -м.

Метод зв'язку блоків даних може бути використаний декілька разів, оскільки його ефект залежить від кількості пов'язаних один з одним блоків даних. Однак для останнього випадку необхідно генерувати значну кількість псевдовипадкових чисел. Для зменшення часу на це пропонується використовувати комбінування підходів до генерування псевдовипадкових чисел, що використовувались у (12) та (13):

$$\left\{ \begin{array}{l} r_i^{(j)(1)} = rand^{(1)}(m_i^{(j)}) \\ r_i^{(j)(2)} = rand^{(2)}(m_i^{(j)}) \\ \dots \\ r_i^{(j)(z)} = rand^{(z)}(m_i^{(j)}) \end{array} \right. . \quad (14)$$

Відповідно хешування $MPHq(1, z + 1, 3 / 4, zq)$ відбуватиметься за таким ітеративним правилом:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_i^{(1)} = f_{v_i^{(1)}}(h_{i-1}^{(1)}, m_i^{(1)}, m_{i-r_i^{(1)}(1)}^{(1)}, m_{i-r_i^{(1)}(2)}^{(1)}, \dots, m_{i-r_i^{(1)}(z)}^{(1)}) \\ h_i^{(2)} = f_{v_i^{(2)}}(h_{i-1}^{(2)}, m_i^{(2)}, m_{i-r_i^{(2)}(1)}^{(2)}, m_{i-r_i^{(2)}(2)}^{(2)}, \dots, m_{i-r_i^{(2)}(z)}^{(2)}) \\ \dots \\ h_i^{(q)} = f_{v_i^{(q)}}(h_{i-1}^{(q)}, m_i^{(q)}, m_{i-r_i^{(q)}(1)}^{(q)}, m_{i-r_i^{(q)}(2)}^{(q)}, \dots, m_{i-r_i^{(q)}(z)}^{(q)}) \end{array} \right. . \quad (15)$$

Не зважаючи на те, що метод хешування, який використовує конструкцію (15), вимагає великої кількості генераторів псевдовипадкових чисел та повинен мати меншу швидкість порівняно з методами, що передбачатимуть обробку даних відповідно формул (12) та (13), що може зменшити його прикладне застосування. Тому для випадків, коли неможливе використання декількох різних генераторів псевдовипадкових чисел пропонується використовувати такий підхід до генерування псевдовипадкових чисел:

$$\begin{cases} r_i^{(j)(1)} = \text{rand}(m_i^{(j)}) \\ r_i^{(j)(2)} = \text{rand}(m_{i+1}^{(j)}) \\ \dots \\ r_i^{(j)(z)} = \text{rand}(m_{i+z-1}^{(j)}) \end{cases} \quad (16)$$

Крім переваги у зменшенні кількості генераторів метод хешування, що використовуватиме генерацію псевдовипадкових чисел за формулою (16), дозволить зменшити кількість ітерацій, якщо кожна наступна ітерація передбачатиме обробку блоків даних з $(i+z)$ -го до $(i+2 \cdot z-1)$ -го.

Висновки

Поява нових атак, що використовують властивість ітеративності операцій у конструкціях, спричинила необхідність у пошуку нових методів хешування, які передбачатимуть використання конструкцій з керованими параметрами операцій. Водночас сьогодення вимагає від комп'ютерних систем розпаралелення обчислень, від хешування – багатоканальності.

Аналіз відомих методів хешування виявив методи стійкого багатоканального хешування, які, проте, не враховують специфіки керованого хешування – наявності вектора керування. З проведеного аналізу методів формування векторів керування випливає, що найкращим є метод формування векторів керування на основі проміжних хеш-значень, оскільки розподіл їх значень є рівномірним, вони є різними для різних каналів та різних повідомлень, а також цей метод є зручним при ключовому хешуванні.

З урахуванням обраного методу формування вектора керування розроблені методи багатоканального керованого хешування, що дозволяють виконувати зв'язок між каналами хешування за допомогою вектора керування. Останнє дозволяє побудувати конструкції, які "опосередковано" пов'язують канали, тобто без участі проміжного хеш-значення як операнда, чого не може бути при класичному ітеративному хешуванні. Водночас дані методи багатоканального керованого хешування дозволяють, як і методи багатоканального ітеративного хешування, здійснювати "безпосередній" зв'язок між каналами, що підтверджується наведеними прикладами конструкцій для реалізації запропонованих методів. Крім цього, в межах концепції керованого хешування можливе використання зав'язування блоків даних з іншими блоками даних, номер яких залежить від даних, що виявив себе швидшим, ніж метод зв'язку каналів за допомогою проміжних хеш-значень. Автори бачать перспективу подальших досліджень у розробці та реалізації функцій ущільнення для запропонованих методів.

Література

1. Kelsey J. Herding hash functions and the Nostradamus attack / John Kelsey, Tadayoshi Kohno. – 2005. – 18 с. – Режим доступу до ресурсу : <http://archives.scovetta.com/pub/crypto/Nostradamus%20Attack.pdf>
2. Hoch J. J. Breaking the ICE – Finding Multicollisions in Iterative Concatenated and Expanded (ICE) Hash Functions / Jonathan J. Hoch, Adi Shamir. – 2006. – 13. – Режим доступу до ресурсу : http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~yaakovh/papers/hashpaper_submission.pdf
3. Баришев Ю. В. Підхід до хешування, що стійке до аналізу зловмисника. / Ю. В. Баришев // Системи обробки інформації. – №3(84). – 2010. – С. 99-100
4. Preneel B. Analysis and Design of Cryptographic Hash Functions. PhD thesis / Bart Preneel. – Katholieke Universiteit Leuven, 1993. – 338 с. – Режим доступу до ресурсу : http://homes.esat.kuleuven.be/~preneel/phd_preneel_feb1993.pdf
5. Lucks S. Design Principles for Iterated Hash Functions / Stefan Lucks // Cryptology ePrint Archive. – 2004. – 22 с. Режим доступу до ресурсу : <http://eprint.iacr.org/2004/253.pdf>
6. Лужецький В. А. Конструкції хешування стійкі до мультиколізій / В. А. Лужецький, Ю. В. Баришев // Наукові праці ВНТУ. – №1. – 2010. – 8 с. – Режим доступу до статті : http://www.nbu.gov.ua/e-journals/vntu/2010_1/2010-1.files/uk/10valsam_ua.pdf

Відомості про авторів

Лужецький Володимир Андрійович – д.т.н, професор, завідувач кафедри захисту інформації;
Баришев Юрій Володимирович – аспірант кафедри захисту інформації.
 Вінницький національний технічний університет

УДК 658.012

С. Д. ШТОВБА, О. Д. ПАНКЕВИЧ, В. В. МАЗУРЕНКО

ЗАЛЕЖНІСТЬ ТОЧНОСТІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ВІД ОБСЯГУ НЕЧІТКОЇ СИНГЛТОННОЇ БАЗИ ЗНАНЬ

Анотация: Досліджується задача ідентифікації багатофакторних залежностей за допомогою нечітких сингтонних баз знань. Запропонована квадратична модель оцінки точності бази знань від її повноти.

Аннотация: Исследуется задача идентификации многофакторных зависимостей с помощью нечетких сингтонных баз знаний. Предложена квадратичная модель оценки точности базы знаний от ее полноты.

Abstract: The work is devoted to the problem of identifying multi-dependency by singleton fuzzy knowledge bases. The quadratic model is proposed for evaluating the accuracy of the knowledge base of its fullness.

Вступ

Ідентифікацію багатофакторних залежностей в техніці, економіці, медицині, соціології, будівництві, сільському господарстві, спорті та в інших областях все частіше здійснюють на основі нечітких баз знань. Нечіткою базою знань називається сукупність нечітких правил "Якщо – тоді", яка задає взаємозв'язок між входами та виходами досліджуваного об'єкту. Існує декілька моделей баз знань, такі як: Мамдані, синглтона, Сугено. В сингтонній базі знань антецеденти представлені нечіткими множинами, а консеквенти – дійсними числами. Алгоритми логічного виведення за сингтонною базою найпростіші, тому її достатньо часто застосовують в нечіткій ідентифікації.

Під час побудови математичної моделі за результатами спостережень вирішують задачі структурної та параметричної ідентифікації [1]. Задачі параметричної ідентифікації на основі сингтонної бази знань легко формалізуються у формі задач неперервної оптимізації [2 – 4]. Відповідні задачі структурної ідентифікації мало досліджені – на сьогодні залишаються відкритими питання про вибір кількості нечітких термів, виду функцій належності, об'єму бази знань тощо [3–8]. **Метою дослідження** є визначення впливу кількості правил на точність нечіткої сингтонної бази знань. Виявлення такої залежності дасть змогу спроектувати адекватну базу знань з мінімальною кількістю правил, що забезпечить її швидше навчання.

Постановка задачі

Вважатимемо відомою тестову вибірку з M пар експериментальних даних, що пов'язують фактори впливу $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ з виходом y досліджуваної залежності:

$$(X_r, y_r), \quad r = \overline{1, M}, \quad (1)$$

де X_r – вхідний вектор в r -ому рядку вибірки та y_r – відповідний вихід.

Позначимо через $y = F(N, X)$ – модель на основі нечіткої сингтонної бази знань з N нечітких правил, що пов'язують X з y . Точність ідентифікації визначимо як середньоквадратичну нев'язку на вибірці (1):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{r=1, M} (y_r - F(N, X_r))^2}. \quad (2)$$

За фіксованого нечіткого розбиття вхідних та вихідної змінних можна згенерувати кілька нечітких баз знань з одним і тим самим числом правил (N). Тому задачу дослідження поставимо, як знаходження залежності точності $RMSE$ від обсягу N бази знань для найкращого, найгіршого та середнього випадків. Побудову таких кривих навчання здійснимо експериментально для трьох еталонних залежностей з подальшою апроксимацією аналітичними моделями.

Нечітке виведення за сингтонною базою знань

Сингтонну нечітку базу знань запишемо так [3]:

$$(x_1 = \tilde{a}_{1j} \text{ та } x_2 = \tilde{a}_{2j} \text{ та } \dots \text{ та } x_n = \tilde{a}_{nj}) \Rightarrow y = d_j, \quad j = \overline{1, N},$$

де \tilde{a}_{ij} – нечіткий терм, яким оцінено фактор x_i в j -му правилі, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, N}$;

d_j – консеквент j -го правила, який задано дійсним числом.

Ступіні належності поточного вхідного вектора $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ до числових значень d_1, d_2, \dots, d_m розраховують так:

$$\mu_{d_j}(X^*) = \mu_j(x_1^*) \cdot \mu_j(x_2^*) \cdot \dots \cdot \mu_j(x_n^*) , \quad j = \overline{1, N} ,$$

де $\mu_j(x_i^*)$ – ступінь належності значення x_i^* нечіткому терму \tilde{a}_{ij} ;

Чітке значення на виході моделі розраховують через дефазифікацію нечіткої множини

$$\tilde{y} = \left(\frac{\mu_{d_1}(X^*)}{d_1}, \frac{\mu_{d_2}(X^*)}{d_2}, \dots, \frac{\mu_{d_m}(X^*)}{d_m} \right) \text{ за методом центра тяжіння:}$$

$$y = \frac{\sum_{i=1}^m d_i \mu_{d_i}(X^*)}{\sum_{i=1}^m \mu_{d_i}(X^*)} .$$

Комп'ютерні експерименти

Експерименти проведемо для 3 еталонних залежностей (рис. 1) – неспадної, унімодальної та багатоекстремальної:

$$y = x_1 \sqrt{x_2} , \quad x_1 \in [2; 22], \quad x_2 \in [2; 14], \quad (3)$$

$$y = -x_1^2 - x_2^2 , \quad x_1 \in [-7; 3], \quad x_2 \in [-5; 5], \quad (4)$$

$$y = (1 + \sin(x_1)^2)^{x_2} , \quad x_1 \in [0; 5], \quad x_2 \in [0.5; 2]. \quad (5)$$

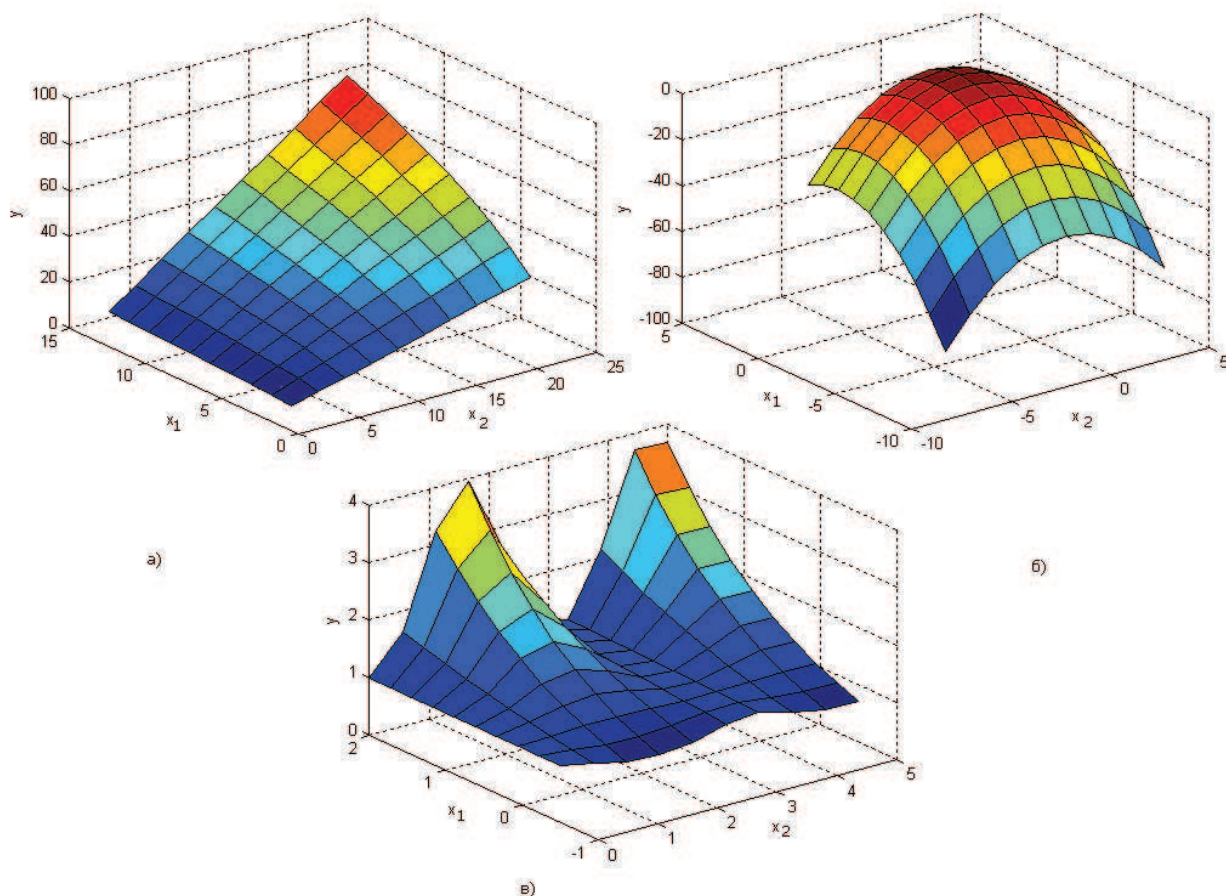


Рисунок 1 – Еталонні залежності: а) неспадна (3); б) унімодальна (4); в) багатоекстремальна (5)

Для кожної нечіткого розбиття експерименти проводилися за такою схемою:

- 1) згенерувати тестову вибірку з 100 точок;
- 2) згенерувати повний список з N_{\max} адекватних нечітких правил;
- 3) синтезувати усі можливі нечіткі бази з N правил, $N = \overline{1, N_{\max}}$;
- 4) для кожної нечіткої бази знань розрахувати нев'язку на тестовій вибірці за формулою (2);
- 5) для кожної множини нечітких баз знань одного розміру знайти мінімальну $RMSE_{\min}$, максимальну $RMSE_{\max}$ та середню $RMSE_{mean}$ нев'язки;
- 6) побудувати графіки залежностей $RMSE_{\min}$, $RMSE_{mean}$ та $RMSE_{\max}$ від N .

Нечітке розбиття здійснено за допомогою гаусових функцій належності, ядра яких рівномірно розподілено на діапазоні вхідних змінних. Коефіцієнт концентрації функцій належності прийнято рівним $c = \Delta core / 2.4$, де $\Delta core$ – відстань між ядрами сусідніх термів. За такого розподілу висота перетину нечітких множин сусідніх термів дорівнює 0.5. Консеквент кожного правила розраховувався за формулами (3) – (5) для ядер нечітких термів антецедента.

Для неспадної залежності (3) для оцінки вхідних змінних використовувалось 2, 3 та 4 термів, тобто експерименти проведено для таких 9-ти нечітких розбиттів вхідних змінних: 2x2, 2x3, 2x4, 3x2, 3x3, 3x4, 4x2, 4x3 та 4x4. Відповідно, максимальна кількість адекватних нечітких правил (N_{\max}) склала 4, 6, 8, 6, 9, 12, 8, 12 та 16. Таким чином, на протязі одного обчислювального експерименту перевірялось від $2^{2 \cdot 2} - 1 = 15$ до $2^{4 \cdot 4} - 1 = 65535$ нечітких баз знань, відповідно здійснено від 1500 до 6553500 нечітких виведень. Для унімодальної залежності (4) використовувалися такі нечіткі розбиття вхідних змінних: 3x3, 3x4, 3x5, 4x3, 4x4 та 5x3. Для багатоекстремальної залежності (5) використовувалися такі нечіткі розбиття вхідних змінних: 4x2, 4x3, 4x4, 5x2 та 5x3.

Результати експериментів (рис. 2) показали, що нев'язка $RMSE_{mean}$ спадає зі збільшенням кількості нечітких правил і досягає мінімуму за повної бази знань. Якщо вдало підібрати комбінацію правил, тоді нев'язка $RMSE_{\min}$ стає суттєво меншою за $RMSE_{mean}$. В багатьох випадках мінімум $RMSE_{\min}$ досягається за неповної бази знань. Для найкращого випадку на кривих навчання добре простежується «плато насичення», коли додавання нових правил майже не змінює адекватність нечіткої моделі [8]. Бази знань з цього «плато насичення» назвемо прийнятними. Планку для них призначимо у вигляді 50% перевищення нев'язки у порівнянні з найкращою нечіткою моделі. На рис. 3 наведені пари таких моделей за нечіткого розбиття 4x4:

- для неспадної еталонної залежності (3) найкраща база знань містить 16 правил, а прийятна – 6;
- для унімодальної еталонної залежності (4) найкраща база знань містить 12 правил, а прийятна – 7;
- для багатоекстремальної еталонної залежності (5) найкраща база знань містить 16 правил, а прийятна – 8.

Зведемо результати усіх експериментів до одного масштабу. Для цього для кожної бази знань розрахуємо відносне відхилення її нев'язки від нев'язки найкращої бази знань. Позначимо цю величину через $\Delta RMSE$. Результати виконання цих дій наведено на рис. 4. Проведена квадратична апроксимація експериментальних даних (рис. 4) свідчить, що повну нечітку базу знань можна скоротити в 2–3 рази без великих втрат точності. Бази знань, які містять біля 70-80% від максимальної кількості правил, мають найвищу точність.

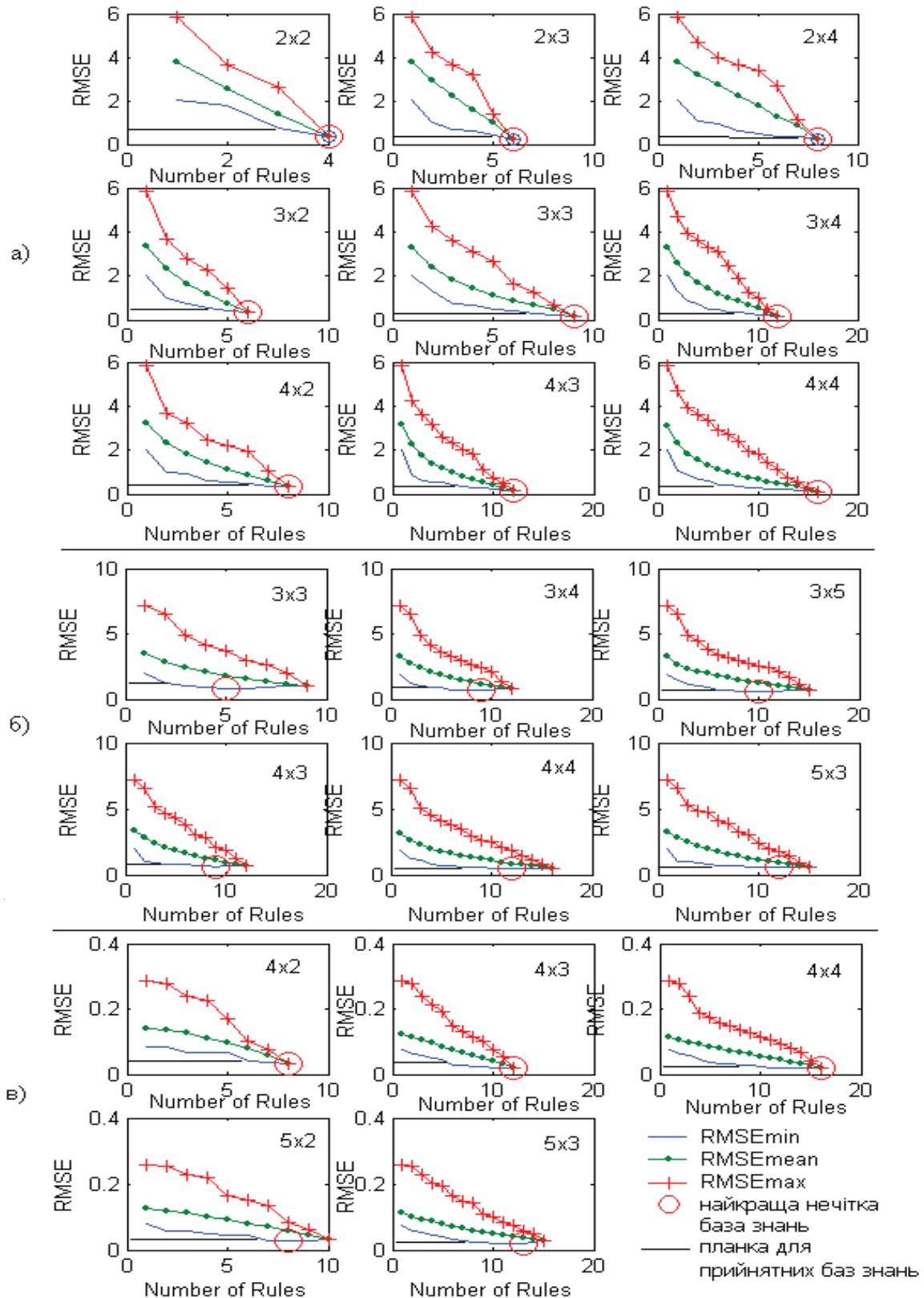


Рисунок 2 – Експериментальні криві навчання нечітких сингלטонних баз знань:

а) для залежності (3); б) для залежності (4); в) для залежності (5)

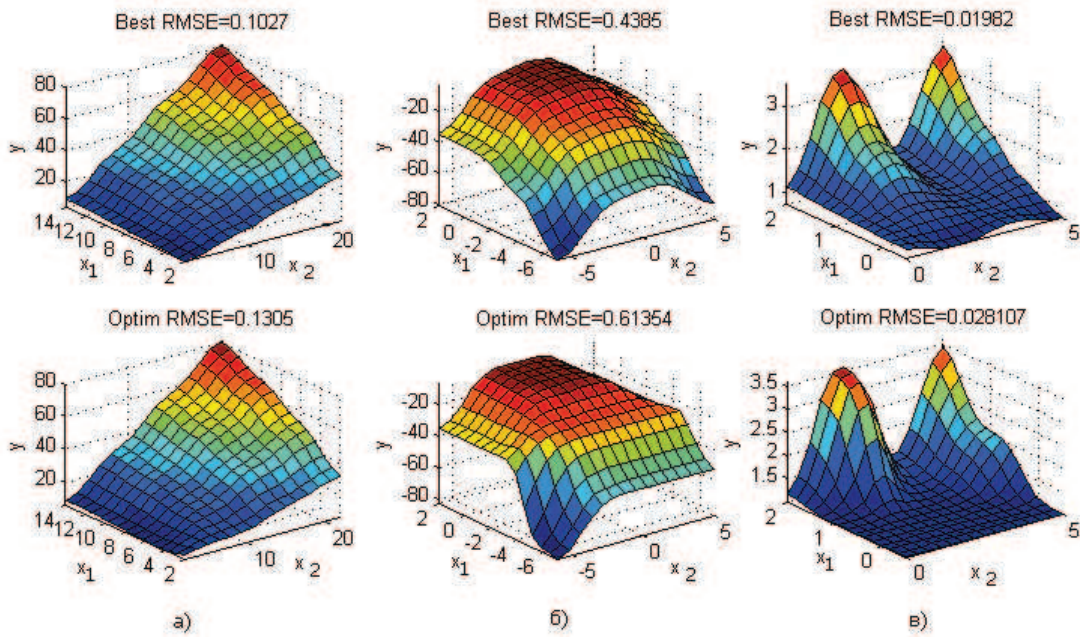


Рисунок 3 – Поверхні найкращої та прийнятної сингтонної бази знань за нечіткого розбиття 4×4 а) для залежності (3); б) для залежності (4); в) для залежності (5)

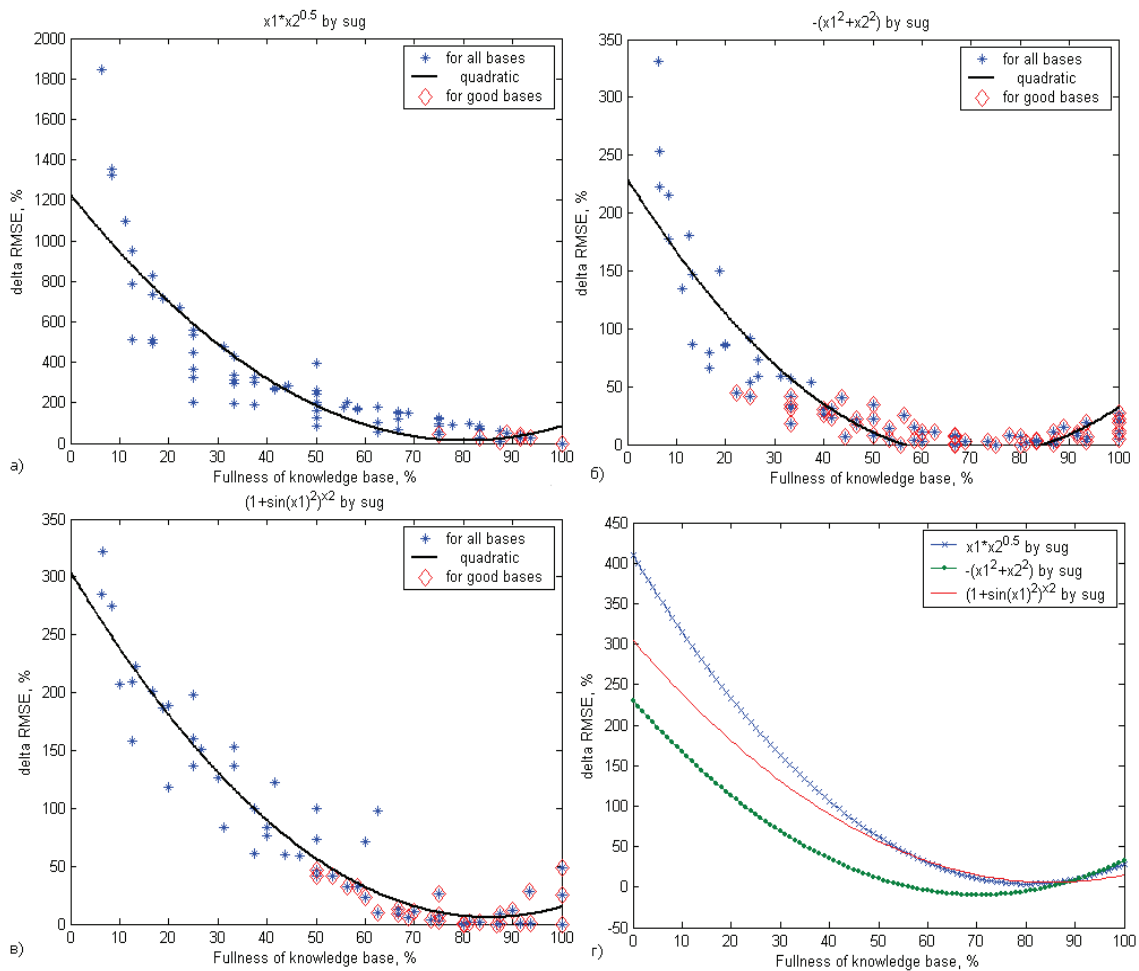


Рисунок 4 – Залежність приросту похибки від повноти нечіткої сингтонної бази знань: а) для залежності (3); б) для залежності (4); в) для залежності (5); г) для всіх залежностей

Висновки

Проведені комп'ютерні експерименти показують, що в більшості випадків найменшу похибку ідентифікації дає неповна нечітка сингтонна база знань, що наповнена правилами на 70-80%. На нашу думку, це обумовлено деякими суперечливостями на границях нечіткого розбиття через взаємодію великої кількості правил. Встановлено, що залежність точності нечіткої бази знань від її розмірності може бути описана поліномом другого порядку. Якщо вдало скоротити повну базу знань втричі, тоді помилка ідентифікації збільшиться лише на 30-50% в порівнянні з найкращим варіантом. Такі компактні бази знань є прозорішими та легше навчаються через меншу складність відповідної задачі оптимізації. Під час створення нової нечіткої моделі дослідивши всього декілька наборів правил, наприклад, найменший, з 80% заповненням та повний, можна отримати квадратичну апроксимацію точності від повноти бази знань.

Подальші дослідження будуть спрямувати на підтвердження отриманих експериментальних висновків для інших форматів нечітких баз знань. Крім того, варто дослідити вплив повноти нечіткої бази знань на тривалість та точність навчання.

Література

1. Цыпкин Я.З. Основы информационной теории идентификации / Цыпкин Я.З. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
2. Takagi T. Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control / Takagi T., Sugeno M. // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics. – 1985. Vol. 15, №1. – P. 116-132.
3. Штовба С.Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB / Штовба С.Д. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 288 с.
4. Ротштейн А.П. Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткая логика, генетические алгоритмы, нейронные сети / Ротштейн А.П. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 1999. – 320 с.
5. Рутковская Д. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы / Рутковская Д., Пилинский М., Рутковский Л. – М.: Горячая линия – Телеком, 2006. – 452 с.
6. Zimmermann H.-J. Fuzzy Sets Theory and Its Applications / Zimmermann H.-J. 3rd ed. – Kluwer Academic Publisher, 1996. – 435 p.
7. Сергиенко М.А. Методы проектирования нечеткой базы знаний / Сергиенко М.А. // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2008. – № 2. – С. 67-71.
8. Ротштейн О.П. Проектування нечітких баз знань: лабораторний практикум та курсове проектування: навч. посіб. / Ротштейн О.П., Штовба С.Д. – Вінниця: Вінницький державний технічний університет, 1999. – 65 с.

Відомості про авторів

Штовба Сергій Дмитрович – доцент, д.т.н., професор кафедри комп'ютерних систем управління, Вінницький національний технічний університет.

Панкевич Ольга Дмитрівна – доцент, к.т.н, доцент кафедри теплогазопостачання, ВНТУ

Мазуренко Віктор Володимирович – студент, факультет автоматики та комп'ютерних систем управління ВНТУ.

УДК 004.02

Я.М. КЛЯТЧЕНКО, В.П.ТАРАСЕНКО, О.В.ТАРАСЕНКО-КЛЯТЧЕНКО

МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ТАБЛИЦЬ ДЛЯ ОЦІНКИ ПОВНОЇ ДОСТОВІРНОСТІ (ВІРОГІДНОСТІ) КОМБІНАЦІЙНИХ СТРУКТУР В УМОВАХ ДЕТЕРМІНОВАНИХ ВХІДНИХ СПОТВОРЕНЬ

Анотация: У статті пропонується метод повної оцінки достовірності функціонування комбінаційних структур за допомогою характеристичних таблиць функції при наявності 1,2,3,...,n-кратних спотворень аргументів. Показано, що у випадках високої ймовірності детермінованих спотворень оцінки достовірності функціонування комбінаційних структур, які отримані відповідно до запропонованого методу, характеризуються більшою повнотою.

Аннотация: В статье предлагается метод полной оценки достоверности функционирования комбинационных структур с помощью характеристических таблиц функции при наличии 1,2,3,...,n-кратных искажений аргументов. Показано, что в случаях высокой вероятности детерминированных искажений оценки достоверности функционирования комбинационных структур, полученных согласно предложенному методу, характеризуются большей полнотой.

Abstract: The paper proposes a method fully estimates the reliability of functioning of the combinatorial structures with the characteristic features tables in the presence of 1,2,3 ..., n-fold distortion of the arguments. It is shown that in cases of high probability of deterministic distortion estimation of reliability functioning of the combinatorial structures, obtained under the proposed method are more complete.

Вступ

Досить широко вживане як в побуті, політиці, так і в деяких технічних сленгах словосполучення «достовірність (вірогідність) інформації» при ближчому його вивченні з технічної точки зору виявляється некоректним, оскільки характеризує відношення суб'єкта до семантичного аспекту інформації (чи «достойна» або «гідна» віри інформація?), причому у суб'єкта цей аспект, як правило, формується інтуїтивно [1]. Однак семантичне наповнення інформації не може визначати стан технічних об'єктів і систем, що здійснюють її обробку і передачу. Тому щодо техніки доречно вести мову не про «достовірність (вірогідність) інформації», а про «достовірність (вірогідність) джерела інформації», маючи на увазі при цьому певну кількісну оцінку вказаної властивості. Найчастіше в техніці для цього використовують ймовірність правильного функціонування технічних засобів при заданих умовах роботи. Крім того, в сучасних умовах втрачає свою, раніш безумовну, аксіоматичність теза про те, що первісною причиною порушень нормальної роботи цифрових засобів є фізичні дефекти радіоелектронних компонент і зв'язків між ними [2]. Дійсно, до цього часу в імовірнісному аналізі правильного функціонування комбінаційних структур (КС) переважно використовувалась так звана модель Коуена-Винограда [3], за якою вхідна інформація вважалась такою, що не містить спотворень, сама КС вважалась ідеальною, а фактори, що викликали неправильну роботу, локалізувалися у «зашумленому» каналі зв'язку, послідовно з'єднаному з КС. Така модель загалом достатньо адекватно працювала на рівні окремого логічного елемента, коли причини неправильної роботи мали внутрішнє фізичне або технологічне походження [4,5].

Постановка задачі

В сучасних умовах все більшу вагу, особливо в системах і технологіях критичного застосування [6], набувають порушення нормальної роботи цифрових засобів, обумовлені дефектами програмного забезпечення (які, як правило, не мають випадкової природи) та спотвореннями самої інформації. В нових розробках цифрових структур їх комбінаційну частину найчастіше реалізують на основі програмованих логічних інтегральних схем (ПЛІС) [7]. Причинами неправильного функціонування пристроїв обробки інформації, виконаних на основі ПЛІС, найчастіше є: а) помилки при програмуванні структури ПЛІС; б) нештатне управління режимами ПЛІС; в) спотворення вхідної інформації як техногенного, так і умисного антропогенного походження, що часто можуть бути викликані атаками на інформацію [8]. Очевидно, що наслідки причин а) та б) можна мінімізувати ще на етапі проектування цифрової структури ретельним логічним моделюванням і перепрограмуванням ПЛІС, а також удосконаленням системи управління, зовнішньої відносно ПЛІС. Однак наслідки причин в) можуть проявлятися тільки в процесі функціонування ПЛІС. Тому наявність причин типу в) вимагає додаткового аналізу та оцінки ймовірності правильної роботи технічних пристроїв обробки інформації в умовах дії вхідних спотворень. Традиційні складові комплексного поняття надійності – безвідмовність, ремонтпридатність, довговічність, збережність, готовність, живучість тощо [9] – не охоплюють негативну дію перелічених вище факторів. Очевидно, що за таких обставин більш адекватною є інша модель аналізу достовірності (вірогідності) КС, коли дія негативних факторів враховується по кожному входу КС, яка сама по собі функціонує правильно (рис.1). Крім того, в такому разі коректно було б говорити про достовірність (вірогідність) джерела інформації або якоїсь цифрової функціональної структури взагалі, оцінюючи її технічний стан ймовірністю правильного функціонування цієї структури [2]. Повна оцінка достовірності (вірогідності) КС – така оцінка, яка враховує не тільки ймовірності появи неспотворених вхідних наборів сигналів, але і ймовірності формування правильних вихідних значень за

наявності спотворених значень на вході (одиначних, подвійних, потрійних і т.д., врешті n -кратних спотворень, де n –число входів КС), а також враховує автокорекцію та взаємну

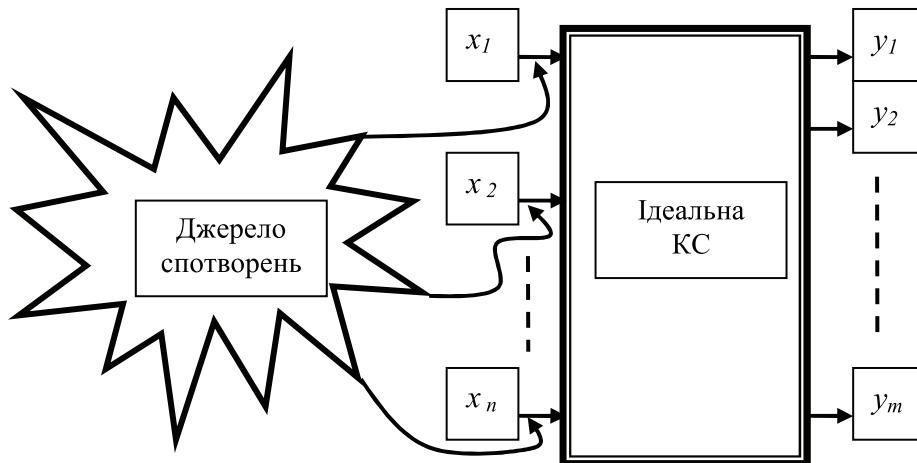


Рисунок 1- Пропонована модель для аналізу достовірності (вірогідності) КС

компенсацію спотворень [10]. Повна оцінка достовірності КС, по-перше, базується на теоремі про повну систему подій [11] та, по-друге, враховує можливості частково-правильного функціонування КС при наявності вхідних спотворень і подає ефект від цього в кількісній формі.

Метод розв’язку поставленої задачі

Основна ідея нижчевикладеного методу повної оцінки достовірності КС полягає в застосуванні апарату характеристичних таблиць [12] не лише до “зразкової” таблиці функції та таблиць функції при наявності однократних спотворень, але і до всіх інших таблиць функції при наявності 2,3, ..., n -кратних спотворень аргументів. Нехай КС реалізує деяке функціональне перетворення, що описується системою перемикальних функцій вигляду

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n), \\ &\dots\dots\dots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

де $x_i, y_i \in \{0, 1\}, i=1, n, j=1, m$. Далі, де можна, систему (1) будемо записувати у векторній формі як $Y = F(X)$, де $Y=(y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m)$; $F=(f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, f_m)$; $X=(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$; $x_i, y_j \in \{0, 1\}; i=\overline{1, n}; j=\overline{1, m}$. Детермінованим спотворенням цифри x_i вектора X будемо називати довільну заміну істинного значення цифри x_i на постійне (наприклад, 0 чи 1), інверсне чи ще яке-небудь значення із наперед відомої множини значень. Таке визначення детермінованого спотворення обумовлене характером переважних помилок у комп’ютерних системах [13] внаслідок константних несправностей в апаратних засобах, що є джерелами інформації, а також випадковими збоями, помилками округлення і трансформованими похибками послідовностей попередніх операцій [14]. Кількість можливих детермінованих спотворень цифр вектора X позначимо як b . Наприклад, найчастіше в роботі цифрових пристроїв зустрічаються спотворення цифр трьох типів: “константа 1”, “константа 0”, “інверсія”, тобто в такому випадку $b=3$. Будемо позначати далі як $x_i^l (l=0, b)$ цифру x_i із спотворенням типу l . Наприклад, $l=0$ означає відсутність будь-яких спотворень, $l=1$ означає спотворення типу “константа 1”, $l=2$ означає спотворення типу “константа 0”, $l=3$ означає спотворення типу “інверсія” і т.д. Очевидно, що правильне функціонування КС визначається системою функцій

$$F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n^0) \quad (2)$$

Однак внаслідок спотворень цифр вектора X функціональне перетворення $Y=F(X)$ може виконуватись і в наступних варіантах:

$$\left. \begin{aligned} &1\text{-й. } F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n^1), \\ &2\text{-й. } F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n^2), \\ &\dots\dots\dots \\ &b\text{-й. } F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n^b), \\ &10\text{-й. } F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^1, x_n^0), \\ &11\text{-й. } F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^1, x_n^1), \\ &\dots\dots\dots \\ &bb\dots bb\text{-й або } V\text{-}l\text{-й. } F(x_1^b, x_2^b, \dots, x_{n-1}^b, x_n^b). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

4. Поставити у відповідність кожній характеристичній таблиці ймовірності їх появи (5).
5. Шляхом порівняння зразкових і характеристичних таблиць підрахувати характеристичні числа s_{jr} , $r=1, \sqrt{V-I}$ для кожної характеристичної таблиці.
6. За формулою (6) оцінити достовірність кожної функції y_j КС.
7. За формулою (7) оцінити достовірність всієї КС.
8. Очевидно, що число характеристичних таблиць для кожної функції y_j на практиці можна дещо скоротити порівняно з $(b+1)^n$, орієнтуючись на кількісні дані про ймовірності p_{il} ($i=1, n, l=0, b$).

Приклади

1. Спершу оцінимо $P\{y_j\}$ для КС, що реалізує n функцій рівнозначності двох аргументів $y_j = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2$, тобто, $m=n$, причому на входах x_{1j} та x_{2j} КС з ймовірностями p_{j1}, p_{j2}, p_{j3} можливі детерміновані спотворення типів "константа 1", "константа 0", "інверсія". Тоді зразкова і всі 15 характеристичних таблиць матимуть вигляд, показаний на рис. 2 (зразкова таблиця займає верхній лівий кут, а значення функцій F ,

$s_{00}=4$		x_2^0		$s_{01}=2$		x_2^1		$s_{02}=2$		x_2^2		$s_{03}=0$		x_2^3	
		1	0			1	1			0	0			0	1
x_1^0	1	1	0	x_1^0	1	1	1	x_1^0	1	0	0	x_1^0	1	0	1
	0	0	1		0	0	0		0	1	1		0	1	0
$p_{10}p_{20}$				$p_{10}p_{21}$				$p_{10}p_{22}$				$p_{10}p_{23}$			
$s_{10}=2$		x_2^0		$s_{11}=2$		x_2^1		$s_{12}=2$		x_2^2		$s_{13}=2$		x_2^3	
		1	0			1	1			0	0			0	1
x_1^1	1	1	0	x_1^1	1	1	1	x_1^1	1	0	0	x_1^1	1	0	1
	1	1	0		1	1	1		1	0	0		1	0	1
$p_{11}p_{20}$				$p_{11}p_{21}$				$p_{11}p_{22}$				$p_{11}p_{23}$			
$s_{20}=2$		x_2^0		$s_{21}=2$		x_2^1		$s_{22}=2$		x_2^2		$s_{23}=2$		x_2^3	
		1	0			1	1			0	0			0	1
x_1^2	0	0	1	x_1^2	0	0	0	x_1^2	0	1	1	x_1^2	0	1	0
	0	0	1		0	0	0		0	1	1		0	1	0
$p_{12}p_{20}$				$p_{12}p_{21}$				$p_{12}p_{22}$				$p_{12}p_{23}$			
$s_{30}=0$		x_2^0		$s_{31}=2$		x_2^1		$s_{32}=2$		x_2^2		$s_{33}=4$		x_2^3	
		1	0			1	1			0	0			0	1
x_1^3	0	0	1	x_1^3	0	0	0	x_1^3	0	1	1	x_1^3	0	1	0
	1	1	0		1	1	1		1	0	0		1	0	1
$p_{13}p_{20}$				$p_{13}p_{21}$				$p_{13}p_{22}$				$p_{13}p_{23}$			

Рисунок 2 - Зразкова та характеристичні таблиці до прикладу 1

що співпадають із зразковою, набрані жирним шрифтом). Крім того, для кожної характеристичної таблиці вказані відповідні ймовірності вхідних спотворень та характеристичні числа. Із таблиць видно, що

$$P\{y_j\} = (4/64)p_{10}p_{20} + (2/64)(p_{10}p_{21} + p_{10}p_{22} + p_{11}p_{20} + p_{11}p_{21} + p_{11}p_{22} + p_{11}p_{23} + p_{12}p_{20} + p_{12}p_{21} + p_{12}p_{22} + p_{12}p_{23} + p_{13}p_{21} + p_{13}p_{22} + p_{13}p_{23}).$$

Надалі, для спрощення обчислень, приймаємо деякі припущення, що мають практичне підґрунтя [9,14], а саме: $p_{10}=p_{20}=p_0$, $p_{j1}=p_{j2}=p_{j3}=p_c$. За цих припущень попередня формула для $P\{y_j\}$ «згортається» до наступної:

$$P\{y_j\} = (1/16)p_0^2 + (1/32)(4p_0p_c + 9p_c^2).$$

З врахуванням нормуючої умови, що в цьому випадку має вигляд $p_0 + 3p_c = 1$ або $p_c = (1-p_0)/3$, отримаємо

$$P\{y_j\} = (1/16)p_0^2 + (1/96)(3-2p_0 - p_0^2).$$

Подальші обчислення за формулою (7) принципових утруднень не викликають.

Порівняємо результати оцінки $P\{y_j\}$ запропонованим і відомим [2] методами. В останній формулі перший доданок відповідає достовірності КС, що оцінена тільки по ймовірностях відсутності вхідних спотворень, а другий доданок виражає абсолютний приріст $P\{y_j\}$ за рахунок частково-правильної роботи КС при наявності спотворень на входах. Тому відношення другого доданка до першого буде визначати відносний приріст достовірності $P\{y_j\}$, який позначимо як D :

$$D = ((1/96)(3-2p_0 - p_0^2)) : ((1/16)p_0^2) = (1/2)p_0^{-2} - (1/3)p_0^{-1} - (1/6).$$

Дослідження залежності D від p_0 показує, що для $p_0 \gg p_c$ (це характерно найчастіше для техногенних спотворень) відносний приріст D достовірності несуттєвий. Якщо ж ймовірності p_0 і p_c сумірні (що характерно для умисних антропогенних спотворень), то D може сягати десятків і сотень відсотків (табл.1).

Таблиця 1 – Залежність D від p_0 (до прикладу 1)

p_0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
$D, \%$	117	67,3	37	19	8,3	3,64	0,74

2. Далі розглянемо КС, що реалізує мажоритарну функцію трьох змінних $y = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$ за умови, що на її входах можуть діяти тільки спотворення типу "константа 1". Зразкова і характеристичні таблиці для цього випадку приведені на рис. 3. Із цих таблиць маємо

$s_{000}=8$		x_2^0				$s_{001}=6$		x_2^0			
		1	1	0	0			1	1	0	0
x_1^0	0	0	1	0	0	x_1^0	0	1	1	0	0
	1	1	1	1	0		1	1	1	1	1
$P_{10}P_{20}P_{30}$		0	1	1	0	$P_{10}P_{20}P_{31}$		1	1	1	1
		x_3^0						x_3^1			
$s_{010}=6$		x_2^1				$s_{100}=6$		x_2^0			
		1	1	1	1			1	1	0	0
x_1^0	0	0	1	1	0	x_1^1	1	1	1	1	0
	1	1	1	1	1		1	1	1	1	0
$P_{10}P_{21}P_{30}$		0	1	1	0	$P_{11}P_{20}P_{30}$		0	1	1	0
		x_3^0						x_3^0			
$s_{011}=4$		x_2^1				$s_{101}=4$		x_2^0			
		1	1	1	1			1	1	0	0
x_1^0	0	1	1	1	1	x_1^1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1
$P_{10}P_{21}P_{31}$		1	1	1	1	$P_{11}P_{20}P_{31}$		1	1	1	1
		x_3^1						x_3^1			
$s_{011}=4$		x_2^1				$s_{111}=4$		x_2^1			
		1	1	1	1			1	1	1	1
x_1^1	1	1	1	1	1	x_1^1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1
$P_{11}P_{21}P_{30}$		0	1	1	0	$P_{11}P_{21}P_{31}$		1	1	1	1
		x_3^0						x_3^1			

Рисунок 3 – Зразкова та характеристичні таблиці до прикладу 2

$$P\{y\} = (8/64) P_{10}P_{20}P_{30} + (6/64)(P_{10}P_{21}P_{30} + P_{10}P_{20}P_{31} + P_{11}P_{20}P_{30} + P_{10}P_{21}P_{31} + P_{11}P_{20}P_{31} + P_{11}P_{21}P_{30} + P_{11}P_{21}P_{31}).$$

Як і в попередньому прикладі припускаємо, що $p_{10} = p_{20} = p_{30} = p_0$, $p_{11} = p_{21} = p_{31} = p_c$, $p_0 + p_c = 1$ або $p_c = 1 - p_0$. Після виконання необхідних підстановок отримаємо

$$P\{y\} = (8/64) p_0^3 + (18/64) p_0^2 p_c + (12/64) p_0 p_c^2 + (4/64) p_c^3 =$$

$$=(1/8)p_0^3+(1/16)+(3/32)p_0^2-(5/32)p_0^3.$$

Отже, абсолютний приріст достовірності $P\{y\}$ за рахунок частково-правильної роботи КС при наявності спотворень на вході складає $(1/16)+(3/32)p_0^2-(5/32)p_0^3$, а відносний приріст становить

$$D = ((1/16)+(3/32)p_0^2-(5/32)p_0^3):((1/8)p_0^3)=(1/2)p_0^{-2}+(3/4)p_0^{-1}-(5/4).$$

Дослідження цієї залежності D від p_0 ілюструє табл.2.

Таблиця 2 – Залежність D від p_0 (до прикладу 2)

p_0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
$D, \%$	425	231	127	66,3	27	12,2	2,2

Висновки

В загальному випадку формулу (6) важко дослідити на максимум функції $P\{y_j\}$, оскільки параметри V, b, p_{il} визначаються варіативними умовами дії детермінованих вхідних спотворень, а характеристичні числа s_{jr} визначаються виключно властивостями систем функцій $F(X)$, що їх реалізує КС. Однак конкретизація всіх цих параметрів в наведених прикладах показує, що саме в умовах високої ймовірності детермінованих спотворень (тобто, за низької ймовірності p_{i0}) оцінки достовірності КС, отримані відповідно до вищевикладеного методу, характеризуються більшою повнотою (про це свідчить великий відносний приріст $P\{y_j\}$ при малих p_{i0}), оскільки враховують можливості частково-правильного функціонування КС за таких умов.

Література

1. Володарський Е.Т. Оценка влияния погрешности восприятия на достоверность диагностирования / Е.Т. Володарський, Е.Е. Кириченко// Технічна електродинаміка. – 2002.- Ч.2. -С.117-120.- (Тем. випуск «Проблеми сучасної електротехніки»).
2. Щербаков Н.С. Достоверность работы цифровых устройств/ Н.С. Щербаков; –М.: «Машиностроение», 1989. -224 с.
3. Виноград С., Надежные вычисления при наличии шумов / С. Виноград, Д.Коуэн –М.: «Наука», 1968, - 216 с.
4. Гриненко В.В. Методы оценки достоверности функционирования биномиальных цифровых устройств./ В.В.Гриненко– В кн. «Материалы 3-й МНК «Современные методы кодирования в электронных системах», изд-во СумГУ, 2004, с.24.
5. Левин В.И. Вероятностный анализ комбинационных схем и их надежность / В.И Левин //Известия АН СССР “Техническая кибернетика”, 1964, №6,с.105...116.
6. Харченко В.С. Критический компьютеринг: единство науки, образования и производства в национальном и международном измерениях. / В.С. Харченко, А.А. Сиора, Н.Ф. Сидоренко, С.Н. Нечаусов // Інформаційні інфраструктури та технології, 2009, с. 30...37.
7. Кузелин М.О. Современные семейства ПЛИС фирмы XILINX / М.О. Кузелин, Д.А. Кнышев, В.Ю. Зотов –М.: «Горячая линия – Телеком», 2004, 440 с.
8. ДСТУ 3396.2-97. Захист інформації. Технічний захист інформації. Терміни і визначення.
9. Тарасенко В.П., Надійність комп'ютерних систем / В.П. Тарасенко, В.І. Корнійчук, А.Ю. Маламан, Ю.П. Черниченко -К.: вид-во «Корнійчук», 2000, - 256 с.
10. Тарасенко В.П. Метод оценки автокорректирующих свойств поразрядных логических операций/ В.П. Тарасенко, О.В. Тарасенко-Клятченко// Радиоэлектроника и информатика. -2001. - № 1(14). -С.83-86.
11. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика/ В.Е. Гмурман – М.: «Высшая школа», 1998, - 480 с.
12. Тарасенко-Клятченко О.В. Сравнительный анализ корректирующий свойств переключательных функций. / О.В.Тарасенко-Клятченко// Правове нормативне та метрологічне забезпечення системи захисту інформації в Україні. Науково-технічний збірник. К.: 2002, вип. 5,, с.189-194.

13. Бондаренко М.Ф., Проектирование и диагностика компьютерных систем и сетей / М.Ф. Бондаренко, Г.Ф. Кривуля, В.Г. Рябцев, С.О. Фрадков, В.И. Хаханов – К.: НМЦВО, 2000, -306 с.
14. Тарасенко В.П. Автокомпенсация трансформированных ошибок при суммировании неточных операндов / В.П. Тарасенко, О.В.Тарасенко-Клятченко // Электронное моделирование , 2001, т.23, №4, с.75...79.

Відомості про авторів

Клятченко Ярослав Михайлович, ст.викладач кафедри спеціалізованих комп'ютерних систем НТУУ «КПІ»; 03056, Київ-56, пр.Перемоги, 37, корпус 15, к.104/1. Тел.(044) 454-94-92. E-mail: k_yaroslav@scs.ntu-kpi.kiev.ua

Тарасенко Володимир Петрович, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри спеціалізованих комп'ютерних систем НТУУ «КПІ»; 03056, Київ-56, пр.Перемоги, 37, корпус 15, к.102. Тел.(факс) (044) 236-32-02. E-mail: vtarasen@scs.ntu-kpi.kiev.ua.

Тарасенко-Клятченко Оксана Володимирівна, кандидат технічних наук, доцент кафедри спеціалізованих комп'ютерних систем НТУУ «КПІ»; 03056, Київ-56, пр.Перемоги, 37, корпус 15, к.104/3. Тел.(044) 454-94-92. E-mail: oxana@scs.ntu-kpi.kiev.ua