

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ

УДК 004.925

М. Д. ОБІДНИК, О. Н. РОМАНЮК

Вінницький національний технічний університет, Вінниця

ПРИСКОРЕНА НОРМАЛІЗАЦІЯ ВЕКТОРІВ ДЛЯ ФОРМУВАННЯ ЗОБРАЖЕНЬ  
ВИСОКОПОЛІГОНАЛЬНИХ СЦЕН

**Анотація.** Запропоновано нові формули для прискореної нормалізації векторів нормалей для формування зображень високодеталізованих поверхонь. Доведено можливість розрахунку з достатньою точністю одиничних векторів без нормалізації. Оцінено похибку використання запропонованих формул для визначення інтенсивності дифузної складової кольору.

**Ключові слова:** комп'ютерна графіка, нормалізація, апроксимація, дифузна складова кольору.

**Аннотация.** Предложены новые формулы для ускоренной нормализации векторов нормалей для формирования изображений высокодетализованных поверхностей. Доказана возможность расчета с достаточной точностью единичных векторов без нормализации. Оценено погрешность использования предложенных формул для определения интенсивности диффузной составляющей цвета.

**Ключевые слова:** компьютерная графика, нормализация, аппроксимация, диффузная составляющая цвета. **Abstract.** The new formula for rapid normalization of vectors of normal imaging highly detailed surfaces. Proved possible to calculate with sufficient accuracy unit vectors without normalization. Error by using the proposed formulas for determining the intensity of the diffuse component of the color.

**Keywords:** computer graphics, normalization, approximation, diffuse color component.

## Вступ

Особливістю високодеталізованої поверхні є висока щільність полігональної мережі, якою вона задається. Це означає, що полігони мають відносно невеликі розміри по відношенню до самого об'єкта візуалізації.

Для розрахунку дифузної та спекулярної складових освітленості кожного полігона розраховуються вектори (нормалі), що задають його орієнтацію в тривимірному просторі. При використанні складних методів тонування, наприклад Фонга, нормалі інтерполюються вздовж ребер, а у подальшому вздовж рядків rasterизації. Кожний вектор, отриманий у результаті інтерполяції, нормалізується. Таке тонування дозволяє створити візуальний ефект кривизни полігона. Проте, зі зменшенням розмірів полігонів, кут між нормаліями, що знаходяться у вершинах, а відповідно і різниця між нормалізованим та ненормалізованим векторами зменшується. Це дає можливість спростити обчислювальну складність процесу тонування за рахунок використання простіших з обчислювальної точки зору формул для нормалізації.

## Аналіз методів і постановка задачі

Загальна формула нормалізації має вигляд [1]:

$$\vec{N}_n = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{\vec{N}}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad (1)$$

де  $\vec{N}$  – вихідний вектор,  $\vec{N}_n$  – нормалізований вектор, а  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  – координати вихідного вектора  $\vec{N}$ .

Нормалізація векторів – це одна з найбільш поширених процедур, яка виконується у процесі візуалізації тривимірної сцени. У роботах [1, 2] був проведений аналіз методів прискореної нормалізації.

Барера, Хаст і Бенгтссон у своїй роботі отримали формулу, яка використовує один крок ітерації Ньютона-Рафсона [3]:

$$\vec{N}_n = \frac{\vec{N}}{3} (3 - \vec{N} \cdot \vec{N}).$$

Розрахунок згідно з наведеною формулою вимагає виконання 1 операції ділення, 9 операцій множення та 3 операцій типу додавання. Великі похибки визначення ортогональних складових вектора обмежує використання формули для зафарбовування, оскільки в цьому випадку мають місце суттєві візуальні відмінності порівняно з еталоном [2].

Згідно з підходом Р.Ліона [4] вираз  $1/\sqrt{\vec{N} \cdot \vec{N}}$ , який використовується для нормалізації вектора нормалі  $\vec{N}$ , розкладають у ряд Тейлора та обмежуються першими трьома членами:

$$\vec{N}_n = \vec{N} \left( 1 - \frac{1}{2} (\vec{N} \cdot \vec{N} - 1) + \frac{3}{8} (\vec{N} \cdot \vec{N} - 1)^2 \right).$$

Формула хоча і придатна для апаратної реалізації, але не забезпечує прийнятної точності, що обмежує її використання [2].

Інтерполювати одиничні вектори нормалей між початковим  $\vec{N}_1$  і кінцевим  $\vec{N}_m$  векторами рядку растеризації, які мають одиничну довжину, можна за формулою [5]:

$$\vec{N}_n(w) = \vec{N}_1 \frac{\sin((1-w)\psi)}{\sin\psi} + \vec{N}_m \frac{\sin(w\psi)}{\sin\psi},$$

де  $w \in [0,1]$ , а  $\psi$  – кут між векторами нормалей  $\vec{N}_1$  і  $\vec{N}_m$ .

Суттєвим недоліком запропонованої формули є необхідність розрахунку тригонометричних функцій  $\sin$  і  $\arccos$  для розрахунку невідомих параметрів  $w$  і  $\psi$ . Крім того, розрахунок  $\vec{N}_n(w)$  передбачає виконання операції ділення.

Розглянуті методи спрощення нормалізації векторів не враховують рівень деталізації тривимірної сцени, зображення якої формується. При підвищенні деталізації тривимірної сцени зменшуються як розміри полігонів, так і кути між нормаллями в вершинах полігонів. Це дає можливість використати простіші та точніші методи прискореної нормалізації.

#### Мета досліджень

Спрощення процедури нормалізації векторів при обчисленні інтенсивності дифузної складової кольору відповідно до рівня деталізації сцени.

#### Розв'язання задачі

Трикутні полігони, з яких складаються тривимірні моделі, задаються вершинами (вертексами), а також нормаллями у них. Якщо вектори нормалей у вершинах полігону не колінеарні, то трикутник, що зафарбовується, виглядає візуально опуклим. При цьому, чим більші кути між нормаллями у вершинах полігону, тим більша його візуальна опуклість. Кількісно опуклість можна оцінити косинусом найбільшого з кутів між нормаллями полігону ( $\cos\varphi$ ). Задамо порогове значення опуклості полігону  $\Theta$ . За умови  $\cos\varphi \geq \Theta$ , полігон відповідає заданому рівню опуклості. При збільшенні деталізації тривимірних об'єктів кути між нормаллями у вершинах полігонів зменшуються. Косинус між двома нормалізованими векторами можна знайти за формулою:

$$\cos\varphi = \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = X1 \cdot X2 + Y1 \cdot Y2 + Z1 \cdot Z2,$$

де  $\vec{N}_1(X1, Y1, Z1)$  і  $\vec{N}_2(X2, Y2, Z2)$  – нормалізовані вектори, а  $\cos\varphi$  – косинус кута між ними.

Використовуючи порогове значення  $\Theta$ , можна визначити відповідність тривимірної сцени заданому рівню опуклості. Якщо вона не відповідає цьому заданому рівню, то її можна привести до нього за рахунок виконання додаткової триангуляції [6].

Спрощення зафарбовування полігонів можна досягти за рахунок вилучення операції нормалізації з процесу растеризації або апроксимації загальної формули простішою. Доцільність такого спрощення можна оцінити за значеннями відносних похибок такої нормалізації.

Знайдемо максимальну різницю між нормалізованим і ненормалізованим векторами при інтерполяції нормалей вздовж рядка растеризації. Початкові точки векторів  $\vec{N}_A$ , і  $\vec{N}_B$  зведемо в одну точку, як показано на рис. 1. Оскільки всі вектори у результаті інтерполяції мають бути одиничної довжини, то їх кінці розміщуються на дузі, яка є частиною кола з одиничним радіусом. Найбільше значення похибки буде спостерігатись у середині ребра полігона, оскільки хорда найбільш віддалена від кола у середній точці. На рисунку 1 вектор, що знаходиться у середній точці ребра полігона, отриманий у результаті лінійної інтерполяції, позначено  $\vec{N}_{1/2}$ ; нормалізований вектор у цій же точці –  $\vec{N}$ ; а різницю між нормалізованим і ненормалізованим векторами –  $\Delta\vec{N}$ .

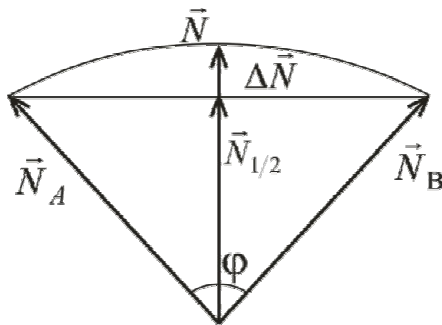


Рисунок 1 – Максимальна різниця нормалізації

Для зменшення обчислювальних затрат на процедуру нормалізації, можна апроксимувати загальну формулу поліномом Чебишева, враховуючи порогове значення  $\Theta$ . При цьому доцільно обмежитись двома або трьома членами поліному залежно від необхідного рівня точності апроксимації. Формулу (1) можна записати у вигляді:

$$\vec{N}_n = \vec{N} \cdot \frac{1}{\sqrt{d}},$$

де  $\sqrt{d} = |\vec{N}|$ ,  $d = X^2 + Y^2 + Z^2 = |\vec{N}|^2$ .  $d$  використаємо у якості змінної при апроксимації поліномом Чебишева.

Лінійна апроксимація формули (1) має вигляд:

$$\vec{N}_n = \vec{N} \cdot (k \cdot d + p), \quad (2)$$

де  $k$  і  $p$  – скалярні коефіцієнти апроксимації.

Порогове значення опуклості  $\Theta$  полігону порівнюється з величиною косинуса найбільшого з кутів між нормаліями у його вершинах, а значення цього кута становить  $\arccos \Theta$ . Якщо у поточному полігоні значення опуклості не перевищує порогове, то виконується нерівність  $\cos \varphi \geq \Theta$ . Косинус найбільшого із кутів між нормаліями у вершинах полігону розраховується за формулою  $\cos \varphi = \vec{N}_A \cdot \vec{N}_B$ . Максимальний діапазон, у якому змінюється довжина векторів, отриманих у результаті лінійної інтерполяції, вздовж ребер полігону становить  $(|\vec{N}_{1/2}|, |\vec{N}|)$ . Із рис. 1 видно, що  $|\vec{N}_{1/2}| = \cos(\varphi/2)$ .

Знайдемо діапазон, у якому змінюється значення  $d$ . Оскільки  $d = X^2 + Y^2 + Z^2 = |\vec{N}|^2$ , то  $d_{1/2} = X_{1/2}^2 + Y_{1/2}^2 + Z_{1/2}^2 = |\vec{N}_{1/2}|^2$ , тому діапазон зміни  $d$  становить:

$$\left( |\vec{N}_{1/2}|^2, |\vec{N}|^2 \right).$$

У табл. 1 наведено формули лінійної апроксимації для різних порогових значень  $\Theta$ . Порогові значення вибрані з міркувань простоти обчислень.

Для підвищення точності апроксимації можна застосувати формулу Чебишева з трьома членами. Хоча при цьому збільшується кількість обчислень на нормалізацію, але отримана формула простіша за (1). Квадратична апроксимація формули (1) має такий вигляд:

$$\vec{N}_n = \vec{N} \cdot (a \cdot d^2 + b \cdot d + c), \quad (3)$$

де  $a, b, c$  – скалярні коефіцієнти квадратичної апроксимації.

Таблиця 1 – Формули лінійної апроксимації формули (1)

Порогове значення, $\Theta$	Макс. кут між нормаллями, $\arccos(\Theta)$	Діапазон зміни $d$ , $(d_{1,2}, 1)$	Формула спрощеної нормалізації відповідно до (2)	Максимальна відносна похибка, $\delta_l$
0	90°	(0.5, 1)	$-0.798 \cdot d + 1.778$	2.475 %
1/2=0.5	60°	(0.75, 1)	$-0.615 \cdot d + 1.611$	0.406 %
3/4=0.75	41.4°	(0.874, 1)	$-0.552 \cdot d + 1.551$	0.087 %
7/8=0.875	28.96°	(0.937, 1)	$-0.525 \cdot d + 1.525$	0.02 %
15/16=0.9375	20.4°	(0.968, 1)	$-0.512 \cdot d + 1.512$	0.005 %
31/32=0.96875	14.4°	(0.984, 1)	$-0.506 \cdot d + 1.506$	0.0012 %

У табл. 2 наведено формули для квадратичної апроксимації для різних порогових значень  $\Theta$ . Як видно з даних, наведених у таблиці, точність квадратичної апроксимації значно вища, ніж лінійної.

Таблиця 2 – Формули квадратичної апроксимації формули (1)

Порогове значення, $\Theta$	Макс. кут між нормаллями, $\arccos(\Theta)$	Діапазон зміни $d$ , $(d_{1/2}, 1)$	Формула спрощеної нормалізації відповідно до (3)	Максимальна відносна похибка, $\delta_k$
0	90°	(0.5, 1)	$0.838 \cdot d^2 - 2.07 \cdot d + 2.235$	0.323 %
1/2=0.5	60°	(0.75, 1)	$0.532 \cdot d^2 - 1.547 \cdot d + 2.016$	0.023 %
3/4=0.75	41.4°	(0.874, 1)	$0.443 \cdot d^2 - 1.382 \cdot d + 1.939$	0.0024 %
7/8=0.875	28.96°	(0.937, 1)	$0.407 \cdot d^2 - 1.312 \cdot d + 1.906$	0.00027 %
15/16=0.9375	20.4°	(0.968, 1)	$0.391 \cdot d^2 - 1.281 \cdot d + 1.89$	0.000034 %
31/32=0.96875	14.4°	(0.984, 1)	$0.383 \cdot d^2 - 1.265 \cdot d + 1.883$	0.000004 %

Оцінимо максимальну відносну похибку лінійної інтерполяції векторів, виконаної без нормалізації, за формулою:

$$\delta = \frac{|\vec{N}| - |\vec{N}_{1/2}|}{|\vec{N}|} \cdot 100\%.$$

Відповідно до заданих порогових значень  $\Theta$ , розраховано значення відносних похибок лінійної інтерполяції, які зведено у таблицю 3. Також у таблиці наведено значення похибок лінійної та квадратичної апроксимації формули (1). Це дає змогу порівняти точність, з якою виконуються спрощенні розраху-

нки, а також доцільність застосування тої чи іншої формули залежно від порогового значення  $\Theta$ .

Таблиця 3 – Порівняння похибок лінійної інтерполяції нормалей та отриманих апроксимаційних формул

Порогове значення, $\Theta$	Макс. кут між векторами у ряд. раст. чи на ребрі полігону, $\varphi$	Максимальна відносна похибка розрахунків, виконаних без нормалізації, $\delta_i$	Максимальна відносна похибка прискореної нормалізації, виконаної за формулою (2), $\delta_i$	Максимальна відносна похибка прискореної нормалізації, виконаної за формулою (3), $\delta_k$
0	90°	29.29 %	2.475 %	0.323 %
1/2=0.5	60°	13.4 %	0.406 %	0.023 %
3/4=0.75	41.4°	6.5 %	0.087 %	0.0024 %
7/8=0.875	28.96°	3.2 %	0.02 %	0.00027 %
15/16=0.9375	20.4°	1.6 %	0.005 %	0.000034 %
31/32=0.96875	14.4°	0.78 %	0.0012 %	0.000004 %

Наведені у таблицях 1 – 3 дані описують прискорену нормалізацію для високодеталізованих поверхонь з різними пороговими значеннями  $\Theta$ . Оцінимо вплив похибок, які мають місце при використанні методів прискореної нормалізації, на результуюче зображення. Для цього потрібно розрахувати похибки визначення інтенсивності кольору, які мають місце у процесі зафарбовування.

Розрахуємо максимальну абсолютну похибку визначення інтенсивності кольору за умови, що визначення дифузної складової світла проводиться за формулою:

$$I_i = I_0 \cdot k_m \cdot (\vec{L} \cdot \vec{N}),$$

де  $I_i$  – інтенсивність дифузної складової світла у поточній точці,  $I_0$  – інтенсивність випромінювання джерела світла,  $k_m$  – коефіцієнт дифузного відбиття,  $\vec{L}$  – вектор, який задає напрямок до джерела світла.

Максимальну абсолютну похибку визначення інтенсивності дифузної складової кольору  $\Delta I_d$  можна визначити за формулою:

$$\Delta I_d = I_0 \cdot k_m \cdot (\vec{L} \cdot \vec{N}) - I_0 \cdot k_m \cdot (\vec{L} \cdot \vec{N}_{1/2}).$$

Враховуючи властивості скалярного добутку, можна записати:

$$\begin{aligned} \Delta I_d &= I_0 \cdot k_m \cdot (\vec{L} \cdot \vec{N}) - I_0 \cdot k_m \cdot (\vec{L} \cdot (\vec{N} - \Delta \vec{N})) = \\ &= I_0 \cdot k_m \cdot (\vec{L} \cdot (\vec{N} - (\vec{N} - \Delta \vec{N}))) = I_0 \cdot k_m \cdot (\vec{L} \cdot \Delta \vec{N}). \end{aligned}$$

Розрахуємо максимальну відносну похибку інтенсивності дифузної складової кольору  $\delta I_d$

$$\delta I_d = \frac{\Delta I}{I_i} = \frac{I_0 \cdot k_m \cdot (\vec{L} \cdot \Delta \vec{N})}{I_0 \cdot k_m \cdot (\vec{L} \cdot \vec{N})} = \frac{\Delta \vec{N}}{\vec{N}}$$

Одиничний вектор нормалі в середній точці ребра трикутника розраховується за формулою [6]:

$$\vec{N} = \frac{\vec{N}_A + \vec{N}_B}{\sqrt{2(1 + \vec{N}_A \cdot \vec{N}_B)}}.$$

Вектор  $\vec{N}_{1/2}$  розраховується за формулою

$$\vec{N}_{1/2} = \frac{\vec{N}_A + \vec{N}_B}{2}.$$

Знайдемо різницю  $\Delta\vec{N}$ :

$$\begin{aligned} \Delta\vec{N} &= \vec{N} - \vec{N}_{1/2} = \frac{\vec{N}_A + \vec{N}_B}{\sqrt{2 \cdot (1 + \vec{N}_A \cdot \vec{N}_B)}} - \frac{\vec{N}_A + \vec{N}_B}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}(\vec{N}_A + \vec{N}_B) - (\sqrt{1 + \vec{N}_A \cdot \vec{N}_B}) \cdot (\vec{N}_A + \vec{N}_B)}{2 \cdot \sqrt{(1 + \vec{N}_A \cdot \vec{N}_B)}} = \\ &= \frac{(\vec{N}_A + \vec{N}_B) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{1 + \vec{N}_A \cdot \vec{N}_B})}{2 \cdot \sqrt{(1 + \vec{N}_A \cdot \vec{N}_B)}} \end{aligned}$$

Отже, при розрахунках векторів, виконаних без нормалізації, максимальна відносна похибка інтенсивності дифузної складової кольору  $\delta I_{di}$  визначається за формулою:

$$\begin{aligned} \delta I_{di} &= \frac{\Delta I}{I_i} = \frac{I_0 \cdot k_m \cdot (\vec{L} \cdot \Delta\vec{N})}{I_0 \cdot k_m \cdot (\vec{L} \cdot \vec{N})} = \frac{I_0 \cdot k_m \cdot \left( \vec{L} \cdot \frac{(\vec{N}_A + \vec{N}_B) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{1 + \vec{N}_A \cdot \vec{N}_B})}{2 \cdot \sqrt{(1 + \vec{N}_A \cdot \vec{N}_B)}} \right)}{I_0 \cdot k_m \cdot \left( \vec{L} \cdot \frac{\vec{N}_A + \vec{N}_B}{\sqrt{2 \cdot (1 + \vec{N}_A \cdot \vec{N}_B)}} \right)} = \\ &= \frac{I_0 \cdot k_m \cdot \left( \vec{L} \cdot \frac{(\vec{N}_A + \vec{N}_B) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{1 + \vec{N}_A \cdot \vec{N}_B})}{2 \cdot \sqrt{(1 + \vec{N}_A \cdot \vec{N}_B)}} \right)}{I_0 \cdot k_m \cdot \left( \vec{L} \cdot \frac{\vec{N}_A + \vec{N}_B}{\sqrt{2 \cdot (1 + \vec{N}_A \cdot \vec{N}_B)}} \right)} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \vec{N}_A \cdot \vec{N}_B}}{\sqrt{2}} = \\ &= 1 - \sqrt{\frac{1 + \vec{N}_A \cdot \vec{N}_B}{2}}. \end{aligned}$$

Визначимо максимальну відносну похибку інтенсивності дифузної складової кольору  $\delta I_{dl}$ , отриману в результаті застосування лінійної апроксимації формули (1):

$$\begin{aligned} \delta I_{dl} &= \frac{\Delta \bar{N}}{\bar{N}} = \frac{\frac{\bar{N}_{1/2} - \bar{N}_{1/2} \cdot (k \cdot d_{1/2} + p)}{|\bar{N}_{1/2}|}}{\frac{\bar{N}_{1/2}}{|\bar{N}_{1/2}|}} = \frac{1 - \frac{|\bar{N}_{1/2}| \cdot (k \cdot d_{1/2} + p)}{|\bar{N}_{1/2}|}}{\frac{1}{|\bar{N}_{1/2}|}} = \\ &= \frac{1 - \frac{|\bar{N}_{1/2}| \cdot (k \cdot d_{1/2} + p)}{|\bar{N}_{1/2}|}}{1} = 1 - |\bar{N}_{1/2}| \cdot (k \cdot d_{1/2} + p). \end{aligned}$$

Оскільки  $d_{1/2} = X_{1/2}^2 + Y_{1/2}^2 + Z_{1/2}^2 = |\bar{N}_{1/2}|^2$ , то

$$\delta I_{dl} = 1 - \sqrt{d_{1/2}} \cdot (k \cdot d_{1/2} + p).$$

Аналогічно, максимальна відносна похибка визначення інтенсивності дифузної складової кольору  $\delta I_{dk}$ , отримана в результаті застосування квадратичної апроксимації формули (1), можна розрахувати за формулою:

$$\delta I_{dk} = 1 - \sqrt{d_{1/2}} \cdot (a \cdot d_{1/2}^2 + b \cdot d_{1/2} + c).$$

Розраховані значення максимальних відносних похибок визначення інтенсивності дифузної складової кольору, для обчислень виконаних без нормалізації, а також із застосуванням лінійної та квадратичної апроксимації формули (1), наведено у табл. 4.

Таблиця 4 – Значення максимальних відносних похибок визначення інтенсивності дифузної складової кольору

$\Theta$	$\varphi$	$\delta I_{di}$	$\delta I_{dl}$	$\delta I_{dk}$
0	90°	29.29 %	2.49 %	0.35 %
1/2=0.5	60°	13.4 %	0.429 %	0.026 %
3/4=0.75	41.4°	6.5 %	0.103 %	0.012 %
7/8=0.875	28.96°	3.2 %	0.04 %	0.09 %
15/16=0.9375	20.4°	1.6 %	0.0094 %	0.0026 %
31/32=0.96875	14.4°	0.78 %	0.0024 %	0.098 %

З наведених формул видно, що при використанні прискореної нормалізації досягається відносно висока точність визначення дифузної складової кольору.

#### Висновки

У результаті проведених досліджень встановлено, що спрощення розрахунку інтенсивності дифузної складової кольору при тонуванні високодеталізованих полігональних поверхонь можна досягти як за рахунок спрощення трудомісткої процедури нормалізації. Із даних, наведених у табл. 1–4, можна вибрати формули прискореної нормалізації залежно від заданого порогового значення  $\Theta$ . Відомо, що візуальна ідентичність зображень досягається при умові, що відносна похибка визначення інтенсивності кольору не перевищує 4 %.

Результати досліджень можна використати для побудови високопродуктивних програмних та апаратних засобів комп'ютерної графіки.

### Список використаної літератури

1. Tomas Akenine-Moller. Real-Time Rendering, Third Edition / Tomas Akenine-Moller, Eric Haines, Naty Hoffman // A K Peters, Ltd. Wellesley, Massachusetts. – 2008. – 1027 pp. – ISBN-13: 978-1-56881-424-7.
2. Романюк О. В. Аналіз методів нормалізації векторів нормалей для задач формування тривимірних зображень [Електронний ресурс] / Романюк О. В., Войтко В. В. // Наукові праці ВНТУ. – 2009. – № 1. – Режим доступу: <http://praci.vntu.edu.ua/article/view/1163/374>.
3. Barrera T. Fast Near Phong-Quality Software / T. Barrera, A. Hast, E. Bengtsson // Shading SCCG'06 full paper, 2006, pp 44-50.
4. Lyon R.F. Phong Shading Reformulation for Hardware Renderer Simplification / R.F.Lyon // Apple Technical Report № 43. – 1993.
5. Hast A. Improved Algorithms for Fast Shading and Lighting / A. Hast // Acta Universitatis Upsaliensis. Uppsala, 2004. – 116 p.
6. Романюк О. Н. Методи додаткової триангуляції / Романюк О. Н., Обідник М. Д. // Вестник Херсонського національного технічного університету. – 2011. – № 3(42). – С. 366–371. – ISSN 2078 – 4481.

### Відомості про авторів

**Обідник Микола Дем'янович** – аспірант кафедри програмного забезпечення, Вінницький національний технічний університет, (0432)598243, м. Вінниця, вул. Хмельницьке шосе 95.

**Романюк Олександр Никифорович** – д. т. н., проф., перший проректор Вінницького національного технічного університету, (0432)598243, м. Вінниця, вул. Хмельницьке шосе 95.