УДК 004.05

К. В. МОРОЗОВ, В. О. РОМАНКЕВИЧ, К. Р. ПОТАПОВА

Національний технічний університет україни «Київський політехнічний інститут»

ПРО МОДИФІКАЦІЮ ГРАФО-ЛОГІЧНОЇ МОДЕЛІ

Анотація. Базова GL-модель відображає поведінку відмовостійких багатопроцесорних систем (ВБС) у потоці відмов, число яких не перевищує припустимого. У випадку, якщо рівень надійності системи, що розробляється, є недостатнім, він може бути підвищений шляхом організації стійкості ВБС до деяких відмов більш високої кратності. Для збереження адекватності моделі поведінці системи в потоці відмов вона може бути модифікована, зокрема, шляхом зміни її реберних функцій. У статті вирішується задача пошуку критеріїв для вибору пар реберних функцій, які доцільно модифікувати.
Ключові слова: GL-модель, модифікація реберних функцій, блоковані вектори.
Аннотация. Базовая GL-модель отражает поведение отказоустойчивых многопроцессорных систем (ОМС) в потоке отказов, число которых не превышает допустимого. В случае, если уровень надежности разрабатываемой системы недостаточен, он может быть повышен путем организации устойчивости ОМС к некоторым отказам более высокой кратности. Для сохранения адекватности модели поведению системы в потоке отказов она может быть модифицирована, в частности, путем изменения ее реберных функций. В статье решается задача поиска критериев для выбора пар реберных функций, которые целесообразно модифицировать.
Ключевые слова: GL-модель, модификация реберных функций, блокируемые векторы.
Abstract. The basic GL-model represents the behavior of the fault-tolerant multiprocessor systems (FTMS) in a stream of failures, the number of which does not exceed the allowable value. If the reliability of the developed system is insufficient, it may be raised by providing tolerance of the FTMS to some failures of higher order. To maintain the adequacy of the model with behavior of the system in a stream of failures it can be modified, in particular by changing its edge functions. This paper solves the problem of finding criteria for selection of pairs of edge functions, that are expedient to be modified.
Keywords: GL-model, modification of edge functions, blocked vectors.

Вступ

Сучасні системи керування (СК) містять у собі багатопроцесорні системи. СК складними й відповідальними об'єктами (такими, як авіаційний і залізничний транспорт, електростанції, технологічні лінії, космічні апарати тощо) повинні, з одного боку, мати високу ступінь надійності, а з іншого – мати достатні ресурси для вирішення великого обсягу задач. Відмовостійкі багатопроцесорні системи (ВБС) [1], на базі яких найчастіше й будуються такі СК, дозволяють задовольнити обидві ці умови.

Розробник СК повинен мати можливість розраховувати показники її надійності. Ця задача може вирішуватися різними способами [2], кожний з яких має свої переваги та недоліки. Один з підходів до її вирішення базується на проведенні статистичних експериментів з так званими графо-логічними моделями [3].

Графо-логічна або GL-модель являє собою неорієнтований граф, кожному ребру якого відповідає булева функція (реберна функція). Аргументами реберної функції є булеві змінні, значення яких відповідають станам кожного із процесорів системи в потоці відмов (1, якщо процесор працездатний, і 0 – якщо вийшов з ладу). Ці змінні формують вектор, який отримав назву вектора стану системи. Якщо функція приймає нульове значення, то відповідне ребро виключається з графа. Втрата графом зв'язності відповідає втраті працездатності системою.

Система, що складається з n процесорів і стійка до відмови будь-яких m із них та модель, що їй відповідає називаються базовими й позначаються $K(m, n)$. Існує декілька способів побудови базових моделей, один з них, зокрема, запропонований в [4].

У випадку, якщо в результаті розрахунків виявляється, що необхідного рівня надійності не досягнуто, розробник може скористатися підходом, який описано в [5], згідно з яким надійність системи підвищується шляхом блокування її відмови при появі векторів стану з більш високою кратністю відмов процесорів. Такі вектори будемо називати блокованими. Для збереження адекватності моделі поведінці системи в потоці відмов, базова модель повинна бути модифікована. Модифікація моделей може виконуватися наступними двома шляхами: зміна структури графа (проведення додаткових ребер) і зміни реберних функцій. При цьому, другий підхід має перевагу в тому, що не ускладнює структуру графа. В результаті модифікації, модель на деякій множині блокованих векторів поводить себе відмінно від базової.

Постановка задачі

В [6] був запропонований метод модифікації базових GL-моделей шляхом зміни однієї реберної функції, недоліком якого є наступне: кількість векторів, які можна блокувати – обмежена. Тому практично корисною може виявитися модифікація одночасно декількох функцій. Однак, результат такої модифікації не завжди задовольняє розробника, виникають побічні ефекти: наприклад, блокування відмов більш високої кратності, що може призвести до порушення адекватності моделі. Тому доводиться виконувати досить складний аналіз для кожного випадку модифікації, внаслідок чого значно ускладнюється процес побудови моделі. Зручно було б мати набір простих критеріїв, що дозволяють вибирати такі множини функцій, модифікація яких гарантовано не призводить до появи побічних ефектів.

Такі критерії можуть бути отримані для будь-якої кількості функцій, що одночасно модифікуються, однак, чим більша їхня кількість, тим більш громіздкими будуть їхні формулювання й докази. Тому, в межах даної статті обмежимося пошуком таких критеріїв для випадку модифікації двох реберних функцій, що задовольняє практичні вимоги.

Модифікація двох реберних функцій

Розглянемо модель $K(m, n)$. Відповідно до алгоритму, запропонованого в [4], при її побудові множина вхідних змінних розбивається на дві підмножини. Далі будуються аналогічні моделі для цих підмножин, для чого, при необхідності, вони також розбиваються. Варто зазначити, що внаслідок таких розбиттів, деякі реберні функції вихідної моделі будуть залежати не від всіх вхідних змінних. У такій моделі реберні функції мають вигляд:

$$f_p = \kappa_1(i, n_1) \vee \kappa_2(m-i, n_2), i \in \{1, 2, ..., m-1\}$$

де $\kappa_1(i, n_1)$ – кон’юнкція виразів реберних функцій моделі $K_1(i, n_1)$, побудованої на деякій підмножині вхідних змінних V_1, потужністю n_1, а $\kappa_2(m-i, n_2)$ – кон’юнкція виразів реберних функцій моделі $K_2(m-i, n_2)$, побудованої на деякій підмножині вхідних змінних V_2, потужністю n_2, і яка не перетинається з V_1.

Виберемо деякі дві реберні функції. В загальному випадку вони будуть мати вигляд:

$$f_1 = \kappa_{11}(i, n_{11}) \vee \kappa_{21}(m-i, n_{21}), i \in \{1, 2, ..., m-1\}$$

$$f_2 = \kappa_{21}(j, n_{21}) \vee \kappa_{22}(m-j, n_{22}), j \in \{1, 2, ..., m-1\}$$

Множину вхідних змінних моделі V можна розбити на три підмножини, що попарно не перетинаються: V_{11}, V_{12} та V_{13}, де V_{11} та V_{12} відповідають розбиттю вхідної множини для функції f_1, а V_{13} містить у собі змінні, від яких ця функція не залежить (може бути порожньою). Аналогічно для функції f_2 множину вхідних змінних V можна розбити на три підмножини V_{21}, V_{22} та V_{23}. Потужності підмножин позначимо відповідно n_{11}, n_{12}, n_{13} та n_{21}, n_{22}, n_{23}. При цьому $n_{11} + n_{12} + n_{13} = n_{21} + n_{22} + n_{23} = n$, де n – кількість всіх вхідних змінних.

Вираз $\kappa_{11}(i, n_{11})$ відповідає кон’юнкції виразів реберних функцій моделі $K_{11}(i, n_{11})$, побудованої для підмножини V_{11}, $\kappa_{12}(m-i, n_{12})$ – моделі $K_{12}(m-i, n_{12})$, для V_{12}, $\kappa_{21}(j, n_{21})$ – моделі $K_{21}(j, n_{21})$, для V_{21}, а $\kappa_{22}(m-j, n_{22})$ – моделі $K_{22}(m-j, n_{22})$, для V_{22}. Для будь-якого вхідного вектора v його частини (підвектори), що відповідають підмножинам V_{11}, V_{12}, V_{13}, V_{21}, V_{22}, та V_{23}, будемо позначати $s_{11}(v)$, $s_{12}(v)$, $s_{13}(v)$, $s_{21}(v)$, $s_{22}(v)$ та $s_{23}(v)$. Кількість нулів у векторі v, будемо позначати $l(v)$, а кількість нулів у його частинах, які відповідають множинам V_{11}, V_{12}, V_{13}, V_{21}, V_{22}, та V_{23} – $l_{11}(v) = l(s_{11}(v))$, $l_{12}(v) = l(s_{12}(v))$, $l_{13}(v) = l(s_{13}(v))$, $l_{21}(v) = l(s_{21}(v))$, $l_{22}(v) = l(s_{22}(v))$ та $l_{23}(v) = l(s_{23}(v))$. Очевидно, що

$$l_{11}(v) + l_{12}(v) + l_{13}(v) = l_{21}(v) + l_{22}(v) + l_{23}(v) = l(v) \tag{1}$$

Кон’юнкція значень реберних функцій моделі приймає значення нуль тоді й тільки тоді, коли хоч одна з них приймає значення, що дорівнює нулю, тобто модель втрачає хоча б одне ребро. Модель $K(m, n)$ втрачає не менше одного ребра на векторах з не менш, ніж m нулями [6]. Звідси можемо зробити висновок, що для вхідного вектора v вирази $\kappa_{11}(i, n_{11})$, $\kappa_{12}(m-i, n_{12})$, $\kappa_{21}(j, n_{21})$ і $\kappa_{22}(m-j, n_{22})$ будуть приймати нульові значення тоді й тільки тоді, коли відповідно $l_{11}(v) \geq i$, $l_{12}(v) \geq m-i$, $l_{21}(v) \geq j$, $l_{22}(v) \geq m-j$.

Нехай модель $K'(m, n)$ отримана з моделі $K(m, n)$ шляхом заміни реберних функцій f_1 на f_1' та f_2 на f_2'. Функції f_1' та f_2' отримані відповідно з f_1 та f_2 способом, що описаний в [6], тобто шляхом заміни $\kappa_{11}(i, n_{11})$ на $\kappa_{11}'(i, n_{11})$ і $\kappa_{21}(j, n_{21})$ на $\kappa_{21}'(j, n_{21})$. Ці функції мають вигляд:

$$\begin{aligned} f_1' &= \kappa_{11}'(i, n_{11}) \vee \kappa_{21}(m-i, n_{21}), i \in \{1, 2, ..., m-1\} \\ f_2' &= \kappa_{21}'(j, n_{21}) \vee \kappa_{22}(m-j, n_{22}), j \in \{1, 2, ..., m-1\} \end{aligned} \tag{2}$$

де $\kappa_{11}'(i, n_{11})$ відрізняється від $\kappa_{11}(i, n_{11})$ тим, що не приймає нульового значення на деякій множині B_1 підвекторів з i нулями, а $\kappa_{21}'(j, n_{11})$ відрізняється від $\kappa_{21}(j, n_{11})$ тим, що не приймає нульового значення на деякій множині B_2 підвекторів з j нулями.

Як було показано в [6], значення f_1 будуть відрізнятися від значень f_1' тільки на векторах v, таких що $s_{11}(v) \in B_1$ та $l_{12}(v) \geq m-i$, причому $f_1(v) = 0$, а $f_1'(v) = 1$. Аналогічно, значення f_2 будуть відрізнятися від значень f_2' тільки на векторах v, таких що $s_{21}(v) \in B_2$ та $l_{22}(v) \geq m-j$, причому $f_2(v) = 0$, а $f_2'(v) = 1$.

Побудуємо таблицю (див. таблицю 1), що відображає кількісні характеристики втрати ребер моделями $K(m, n)$ і $K'(m, n)$ залежно від кількості нулів у вхідному векторі та значень функцій f_1, f_2, f_1', f_2' для всіх можливих випадків. Відзначимо, що ситуацій, коли $f_1 = 1$, а $f_1' = 0$ і $f_2 = 1$, а $f_2' = 0$ бути не може [6]. Також у таблиці вказується зв’язність графів моделей $K(m, n)$ і $K'(m, n)$ в кожному випадку.

Таблиця 1 – Кількісні характеристики втрати ребер моделями K(m, n) і K'(m, n)

Кількість нулів у векторі	f_1	f_1'	f_2	f_2'	Кількість ребер, що втрачає $K(m, n)$	Кількість ребер, що втрачає $K'(m, n)$	Зв'язність графа моделі $K(m, n)$	Зв'язність графа моделі $K'(m, n)$
$<m$	1	1	1	1	0	0	+	+
m	1	1	1	1	1	1	+	+
m	0	0	1	1	1	1	+	+
m	0	1	1	1	1	0	+	+
m	1	1	0	0	1	1	+	+
m	1	1	0	1	1	0	+	+
m+1	1	1	1	1	2	2	–	–
m+1	1	1	0	0	2	2	–	–
m+1	**1**	**1**	**0**	**1**	**2**	**1**	**–**	**+**
m+1	0	0	1	1	2	2	–	–
m+1	**0**	**1**	**1**	**1**	**2**	**1**	**–**	**+**
m+1	0	0	0	0	2	2	–	–
m+1	**0**	**0**	**0**	**1**	**2**	**1**	**–**	**+**
m+1	**0**	**1**	**0**	**0**	**2**	**1**	**–**	**+**
m+1	0	1	0	1	2	0	–	–
m+2	1	1	1	1	3	3	–	–
m+2	1	1	0	0	3	3	–	–
m+2	1	1	0	1	3	2	–	–
m+2	0	0	1	1	3	3	–	–
m+2	0	1	1	1	3	2	–	–
m+2	0	0	0	0	3	3	–	–
m+2	0	0	0	1	3	2	–	–
m+2	0	1	0	0	3	2	–	–
m+2	**0**	**1**	**0**	**1**	**3**	**1**	**–**	**+**
≥m+3	1	1	1	1	≥4	≥4	–	–
≥m+3	1	1	0	0	≥4	≥4	–	–
≥m+3	1	1	0	1	≥4	≥3	–	–
≥m+3	0	0	1	1	≥4	≥4	–	–
≥m+3	0	1	1	1	≥4	≥3	–	–
≥m+3	0	0	0	0	≥4	≥4	–	–
≥m+3	0	0	0	1	≥4	≥3	–	–
≥m+3	0	1	0	0	≥4	≥3	–	–
≥m+3	0	1	0	1	≥4	≥2	–	–

Для векторів з менш, ніж m нулями модель $K(m, n)$ не втрачає ребер, а тому і f_1, і f_2 можуть бути рівні тільки 1. Для векторів з m нулями модель $K(m, n)$ втрачає одне ребро, а тому нулю може дорівнювати тільки одна з функцій: f_1, або f_2. Для векторів з m + 1 і більше нулями модель $K(m, n)$ втрачає 2 і більше ребер, отже нулю можуть бути рівні обидві функції: f_1 та f_2.

В таблиці виділено рядки, що відповідають ситуаціям, коли граф моделі $K(m, n)$ втрачає зв'язність, а граф $K'(m, n)$ залишається зв'язним. При цьому протилежної ситуації, відповідно до таблиці, бути не може.

Помітимо, що для векторів з не більш, ніж m нулями поведінка обох моделей збігається (обидва графи є зв'язними). Для векторів з не менш, ніж m + 3 нулями поведінка обох моделей також збігається (обидва графи втрачають зв'язність). Поведінка моделей може відрізнятися тільки на деяких векторах з m + 1 нулем, а також з m + 2 нулями.

Проаналізуємо, які вектори з m + 1 нулем будуть блоковані за допомогою даної модифікації. Як бачимо (з таблиці 1), це – вектори, на яких $f_1 = 0$, а $f_1' = 1$ і/або $f_2 = 0$, а $f_2' = 1$. Тобто, множина блокованих векторів буде представляти собою об'єднання множин векторів, блокованих внаслідок модифікації тільки функції f_1 або тільки функції f_2. Ця множина буде дорівнювати об'єднанню чотирьох підмножин (як показано в [6]):

1) Всі вектори, у яких $s_{11}(v)$ належить множині B_1, $s_{12}(v)$ – будь-який вектор з $m - i$ нулями та $s_{13}(v)$ – будь-який вектор з одним нулем.

2) Вектори, у яких $s_{11}(v)$ належить множині B_1, $s_{12}(v)$ – будь-який вектор з $m - i + 1$ нулями та $s_{13}(v)$ не містить нулів.

3) Всі вектори, у яких $s_{21}(v)$ належить множині B_2, $s_{22}(v)$ – будь-який вектор з $m-j$ нулями та $s_{23}(v)$ –будь-який вектор з одним нулем.

4) Вектори, у яких $s_{21}(v)$ належить множині B_2, $s_{22}(v)$ – будь-який вектор з $m-j+1$ нулями та $s_{23}(v)$ не містить нулів.

Кількість блокованих векторів у такому випадку дорівнюватиме

$$N = N_1 + N_2 - N_{12} \tag{3}$$

де N_1 – потужність множини векторів, блокованих внаслідок модифікації функції f_1, N_2 – потужність множини векторів, блокованих внаслідок модифікації функції f_2, а N_{12} – потужність множини, що дорівнює перетину вищезгаданих множин. При цьому, як було показано в [6]:

$$\begin{aligned} N_1 &= |B_1|\left(C_{n_{12}}^{m-i} \cdot n_{13} + C_{n_{12}}^{m-i+1}\right) \\ N_2 &= |B_2|\left(C_{n_{22}}^{m-j} \cdot n_{23} + C_{n_{22}}^{m-j+1}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Значення N_{12} буде відрізнятися від нуля якщо існують такі вектори з $m+1$ нулем, які блокуються як внаслідок модифікації f_1, так і внаслідок модифікації f_2.

Крім векторів з $m+1$ нулем, в результаті модифікації можуть бути також блоковані вектори з $m+2$ нулями. У більшості випадків їх наявність є небажаним побічним ефектом. Сформулюємо умови, достатні для забезпечення його відсутності.

Розглянемо, які вектори v з $m+2$ нулями ($l(v) = m+2$) будуть блоковані в результаті модифікації. Виходячи з таблиці 1, бачимо, що це – вектори, на яких f_1 та f_2 дорівнюють нулю, а f_1' та f_2' дорівнюють одиниці. Множина цих векторів буде дорівнювати перетину множин векторів, на яких $f_1 = 0$, а $f_1' = 1$ та $f_2 = 0$, а $f_2' = 1$.

Як вже було сказано, перша множина містить у собі всі вектори, у яких $s_{11}(v) \in B_1$ та $l_{12}(v) \geq m-i$, а друга – всі вектори, у яких $s_{21}(v) \in B_2$ та $l_{22}(v) \geq m-j$. Таким чином, побічний ефект буде проявлятися на векторах, для яких одночасно виконуються наступні умови:

1) $s_{11}(v) \in B_1$

2) $l_{12}(v) \geq m-i$

3) $s_{21}(v) \in B_2$

4) $l_{22}(v) \geq m-j$

Розглянемо, в яких випадках можливе одночасне виконання цих умов. Відповідно до побудови, запропонованої в [4], можливі наступні ситуації:

1) $V_{11} = V_{21}$ та $V_{12} = V_{22}$;

2) $V_{11} = V_{22}$ та $V_{12} = V_{21}$;

3) $V_{11} \subset V_{21}$ та $V_{12} \subset V_{21}$;

4) $V_{11} \subset V_{22}$ та $V_{12} \subset V_{22}$;

5) $V_{21} \subset V_{11}$ та $V_{22} \subset V_{11}$;

6) $V_{21} \subset V_{12}$ та $V_{22} \subset V_{12}$;

7) $V_{11} \subset V_{23}$, $V_{12} \subset V_{23}$, $V_{21} \subset V_{13}$ та $V_{22} \subset V_{13}$

У ситуаціях 1 і 2 реберні функції, що модифікуються, побудовані на основі одного й того самого розбиття множини вхідних змінних. У ситуаціях 3, 4, 5 й 6 одна з функцій, що модифікуються, побудована на основі розбиття множини вхідних змінних іншої функції. У ситуації 7 реберні функції, що модифікуються, побудовані на незалежних підмножинах вхідних змінних.

Розглянемо можливість виконання сформульованих вище умов для кожної ситуації.

1. $V_{11} = V_{21}$ та $V_{12} = V_{22}$

В такому випадку $s_{11}(v) = s_{21}(v)$, $s_{12}(v) = s_{22}(v)$. Нехай $s_{11}(v) = s_{21}(v) = x$, а $s_{12}(v) = s_{22}(v) = y$. Зазначимо, що B_1 та B_2 містять (під)вектори відповідно з i та j нулями. У такому випадку, для виконання умови 1 необхідно, щоб x містив відповідно рівно i нулів, а для виконання умови 3 він повинен містити рівно j нулів. Ця ситуація можлива тільки, якщо $i = j$. Але в такому випадку f_1 та f_2 – одна й та сама функція (і при цьому модифікована одна й та сама її частина), що неможливо, тому що модифікуються дві різні функції.

Таким чином, для пункту 1 обидві модифікації ніколи не будуть проявлятися одночасно, отже, побічний ефект не буде виникати. Також відзначимо, що в цій ситуації N_{12} завжди дорівнюватиме нулю, і потужність множини блокованих векторів, відповідно до (3) та (4), дорівнюватиме:

$$N = N_1 + N_2 = |B_1|\left(C_{n_{12}}^{m-i} \cdot n_{13} + C_{n_{12}}^{m-i+1}\right) + |B_2|\left(C_{n_{22}}^{m-j} \cdot n_{23} + C_{n_{22}}^{m-j+1}\right) \tag{5}$$

2. $V_{11} = V_{22}$ та $V_{12} = V_{21}$

В такому випадку $s_{11}(v) = s_{22}(v)$, $s_{12}(v) = s_{21}(v)$. Нехай $s_{11}(v) = s_{22}(v) = x$, а $s_{12}(v) = s_{21}(v) = y$. Зазначимо, що B_1 та B_2 містять (під)вектори відповідно з i та j нулями. Для виконання умов 1 і 3 необхідно, щоб x містив рівно i нулів, а y – рівно j нулів. Тобто, $l(x) = i$, а $l(y) = j$. Підставивши ці значення в умови 2 та 4, отримаємо:

2) $j \geq m - i$

4) $i \geq m - j$

Звідси маємо: $i + j \geq m$.

Таким чином, якщо $i + j < m$, обидві модифікації ніколи не будуть проявлятися одночасно. Якщо ж $i + j = m$, отримаємо, $j = m - i$, що відповідає випадку, коли f_1 та f_2 – одна й та сама функція (у якої модифікували різні частини). Останнє є неможливим, оскільки ми розглядаємо модифікацію двох різних функцій.

В той же час, якщо $i + j > m$ і умови 1 та 3 виконуються, то, відповідно до (1) $l(v) = l(s_{11}(v)) + l(s_{12}(v)) + l(s_{13}(v)) \geq l(s_{11}(v)) + l(s_{12}(v)) = i + j$. Таким чином, вектор v міститиме не менш, ніж $i + j$ нулів. У випадку, якщо $i + j > m + 2$, умови будуть виконуватися тільки на векторах з більш, ніж $m + 2$ нулями, що не призведе до побічного ефекту.

Отже, побічний ефект може проявлятися лише тоді, коли $m < i + j \leq m + 2$, тобто $i + j = m + 1$, або $i + j = m + 2$. У випадку, якщо $i + j \leq m$ або $i + j > m + 2$, побічний ефект не проявляється, а N_{12} дорівнює нулю, і буде справедливим вираз (5).

2.1. Розглянемо також окремий випадок: $n_{13} = n_{23} = 0$. Очевидно, що $l(s_{13}(v)) \leq n_{13}$, тобто $l(s_{13}(v))=0$. Тоді, $l(v) = l(s_{11}(v)) + l(s_{12}(v)) + l(s_{13}(v)) = l(s_{11}(v)) + l(s_{12}(v)) = i + j$. Отже, вектор v буде містити рівно $i + j$ нулів. Якщо $i + j = m + 1$, то умови будуть виконуватися одночасно тільки на векторі з $m + 1$ нулем. Таким чином, побічний ефект проявлятися не буде. При цьому, на таких векторах модифікована модель не втратить жодного ребра. Ці вектори блоковані внаслідок модифікації одночасно і f_1, і f_2. Їх кількість: $N_{12} = |B_1| \cdot |B_2|$. Таким чином, кількість блокованих векторів дорівнюватиме:

$$N = N_1 + N_2 - N_{12} = |B_1|\left(C_{n_{12}}^{m-i} \cdot n_{13} + C_{n_{12}}^{m-i+1}\right) + |B_2|\left(C_{n_{22}}^{m-j} \cdot n_{23} + C_{n_{22}}^{m-j+1}\right) - |B_1| \cdot |B_2| \quad (6)$$

3. $V_{11} \subset V_{21}$ та $V_{12} \subset V_{21}$ (аналогічно і для випадку $V_{21} \subset V_{11}$ та $V_{22} \subset V_{11}$)

У такому випадку для будь-якого вектора v буде вірно:

$$l\left(s_{21}(v)\right) \geq l\left(s_{11}(v)\right) + l\left(s_{12}(v)\right) \quad (7)$$

Розглянемо, в яких випадках будуть виконуватися умови появи побічного ефекту. Для виконання умови 1 повинно мати місце $s_{11}(v) \in B_1$, і отже, $l(s_{11}(v)) = i$, а для виконання умови 2: $l(s_{12}(v)) \geq m - i$. Таким чином, відповідно до (7) $l(s_{21}(v)) \geq m$. Для виконання умови 3 повинно мати місце $s_{21}(v) \in B_2$, і, отже, $l(s_{21}(v)) = j$. У такому випадку, отримаємо: $j \geq m$, що є неможливим, оскільки відповідно до (2) $1 \leq j < m$. Отже, одночасне виконання умов 1–3 є також неможливим, а тому побічний ефект виникати не буде. Це означає, що N_{12} завжди дорівнюватиме нулю, і кількість блокованих векторів буде розраховуватись відповідно до виразу (5).

4. $V_{11} \subset V_{22}$ та $V_{12} \subset V_{22}$ (аналогічно і для випадку $V_{21} \subset V_{12}$ та $V_{22} \subset V_{12}$)

В такому випадку для будь-якого вектора v буде справедливим

$$l\left(s_{22}(v)\right) \geq l\left(s_{11}(v)\right) + l\left(s_{12}(v)\right) \quad (8)$$

Розглянемо, в яких випадках будуть виконуватися умови появи побічного ефекту. Для виконання умови 1 повинно мати місце $s_{11}(v) \in B_1$, отже $l(s_{11}(v)) = i$, а для виконання умови 2: $l(s_{12}(v)) \geq m - i$. Отже, відповідно до (8) $l(s_{22}(v)) \geq m$. Умова 4 буде виконуватися автоматично. Для виконання умови 3 повинно мати місце $s_{21}(v) \in B_2$, отже $l(s_{21}(v)) = j$.

Відповідно до (1) $l(v) = l(s_{11}(v)) + l(s_{12}(v)) + l(s_{13}(v)) \geq l(s_{11}(v)) + l(s_{12}(v)) \geq m + j$. Таким чином, вектор v міститиме не менш, ніж $m + j$ нулів. При цьому, якщо $j > 2$, то вектор v (на якому проявляються обидві модифікації) буде завжди містити більше, ніж $m + 2$ нулі, що, як було показано вище, не призводить до виникнення побічного ефекту. У такому разі N_{12} завжди дорівнюватиме нулю, і кількість блокованих векторів відповідатиме виразу (5) (для випадку $V_{21} \subset V_{12}$ та $V_{22} \subset V_{12}$ аналолгічною умовою буде $i > 2$).

5. $V_{11} \subset V_{23}$, $V_{12} \subset V_{23}$, $V_{21} \subset V_{13}$ та $V_{22} \subset V_{13}$.

У такому випадку для будь-якого вектора v буде вірно:

$$l\left(s_{13}(v)\right) \geq l\left(s_{21}(v)\right) + l\left(s_{22}(v)\right) \quad (9)$$

Розглянемо, у яких випадках будуть виконуватися умови появи побічного ефекту. Для виконання умови 3 повинно мати місце $s_{21}(v) \in B_2$, отже, $l(s_{21}(v)) = j$, а для виконання умови 4: $l(s_{22}(v)) \geq m - j$. Таким чином, відповідно до (9), $l(s_{13}(v)) \geq m$. З іншого боку, для виконання умови 1 повинно мати місце $s_{11}(v) \in B_1$, отже $l(s_{11}(v)) = i$, а для виконання умови 2: $l(s_{12}(v)) \geq m - i$.

Відповідно до (1) $l(v) = l(s_{11}(v)) + l(s_{12}(v)) + l(s_{13}(v)) \geq 2m$. Таким чином, вектор v буде містити не менш, ніж $2m$ нулів. При цьому, якщо $m > 2$, то вектор v (на якому проявляються обидві модифікації) буде завжди містити більше, ніж $m + 2$ нулі ($2m = m + m > m + 2$), що, як було показано вище, не призводить до появи побічного ефекту. Також, у такому випадку N_{12} завжди дорівнюватиме нулю, і кількість блокованих векторів відповідатиме виразу (5).

Таким чином, побічний ефект не буде виникати в наступних випадках:

1) $V_{11} = V_{21}$ та $V_{12} = V_{22}$; 2) $V_{11} = V_{22}$, $V_{12} = V_{21}$ та $i + j \leq m$, або $i + j > m + 2$;

3) $V_{11} \subset V_{21}$ та $V_{12} \subset V_{21}$; 4) $V_{11} \subset V_{22}$, $V_{12} \subset V_{22}$ та $j > 2$;

5) $V_{21} \subset V_{11}$ та $V_{22} \subset V_{11}$; 6) $V_{21} \subset V_{12}$, $V_{22} \subset V_{12}$ та $i > 2$;

7) $V_{11} \subset V_{23}$, $V_{12} \subset V_{23}$, $V_{21} \subset V_{13}$, $V_{22} \subset V_{13}$ та $m > 2$.

При цьому кількість блокованих векторів буде розраховуватися відповідно до (5).

У випадку, якщо $V_{11} = V_{22}$, $V_{12} = V_{21}$, $n_{13} = n_{23} = 0$ та $i + j = m + 1$ побічний ефект також не буде виникати, але кількість блокованих векторів розраховуватиметься відповідно до (6).

Приклад

Для прикладу розглянемо модель $K(5, 13)$. Вона містить 9 реберних функцій (для зменшення обсягу статті функції записані в скороченому вигляді, а метод їх формування представлено, наприклад, в [4]):

$$f_1 = \kappa_{11}(3,3) \vee \kappa_{12}(2,3) \qquad f_2 = \kappa_{11}(2,3) \vee \kappa_{12}(3,3) \qquad f_3 = \kappa_1(4,6) \vee \kappa_2(1,7)$$

$$f_4 = \kappa_1(3,6) \vee \kappa_2(2,7) \qquad f_5 = \kappa_1(2,6) \vee \kappa_2(3,7) \qquad f_6 = \kappa_1(1,6) \vee \kappa_2(4,7)$$

$$f_7 = \kappa_{21}(3,3) \vee \kappa_{22}(2,4) \qquad f_8 = \kappa_{21}(2,3) \vee \kappa_{22}(3,4) \qquad f_9 = \kappa_{21}(1,3) \vee \kappa_{22}(4,4)$$

Таблиця 2 – Кількість векторів, заблокованих внаслідок модифікації моделі

	–	f_1 П	f_2 Л	f_3 Л	f_3 П	f_4 Л	f_4 П	f_5 Л	f_5 П	f_6 Л	f_6 П	f_7 П	f_8 Л	f_8 П	f_9 Л
–	–	21	21	315	42	700	315	525	700	126	525	36	75	76	18
f_1 П	21	–	42	336	42	721	336/63	546	721	147	546	57	96	97	39
f_2 Л	21	42	–	336	42	721	336/63	546	721	147	546	57	96	97	39
f_3 Л	315	336	336	–	–	1015	315	840	1015/525	441	840	351	390	391	333
f_3 П	42	42	42	–	–	742	357	567	742	168	567	78	117	118	60
f_4 Л	700	721	721	1015	742	–	–	1225	700	826	1225/700	736	775	776	718
f_4 П	315	336/63	336/63	315	357	–	–	840	1015	441	840	351	390	391	333
f_5 Л	525	546	546	840	567	1225	840	–	–	651	525	561/90	600/180	601/180	543/45
f_5 П	700	721	721	1015/525	742	700	1015	–	–	826	1225	736	775	776	718
f_6 Л	126	147	147	441	168	826	441	651	826	–	–	126	129/18	130/24	126
f_6 П	525	546	546	840	567	1225/700	840	525	1225	–	–	561	600	601	543
f_7 П	36	57	57	351	78	736	351	561/90	736	126	561	–	111	112	54
f_8 Л	75	96	96	390	117	775	390	600/180	775	129/18	600	111	–	–	93
f_8 П	76	97	97	391	118	776	391	601/180	776	130/24	601	112	–	–	94
f_9 Л	18	39	39	333	60	718	333	543/45	718	126	543	54	93	94	–

Таблиця 3 – Аналіз випадків появи побічного ефекту

<table>
<tr><th colspan="2">Функції, що модифікують</th><th>Відношення підмножин змінних</th><th>Причина</th><th>Номер умови</th><th>Результат</th></tr>
<tr><td>f_1 П</td><td>f_3 П</td><td rowspan="4">$V_{11} \subset V_{22}$, $V_{12} \subset V_{22}$</td><td>$j = 1$</td><td rowspan="4">4</td><td rowspan="2">Блоковано вектори з 7 нулями (не проявилося)</td></tr>
<tr><td>f_2 Л</td><td>f_3 П</td><td>$j = 1$</td></tr>
<tr><td>f_1 П</td><td>f_4 П</td><td>$j = 2$</td><td rowspan="2">Блоковано вектори з 7 нулями</td></tr>
<tr><td>f_2 Л</td><td>f_4 П</td><td>$j = 2$</td></tr>
<tr><td>f_3 Л</td><td>f_4 П</td><td rowspan="5">$V_{11} = V_{22}$, $V_{12} = V_{21}$</td><td rowspan="3">$n_{13} = n_{23} = 0$
$i + j = 6$</td><td rowspan="5">2</td><td rowspan="3">Кількість блокованих векторів з 6 нулями розраховується відповідно до (6)</td></tr>
<tr><td>f_4 Л</td><td>f_5 П</td></tr>
<tr><td>f_5 Л</td><td>f_6 П</td></tr>
<tr><td>f_3 Л</td><td>f_5 П</td><td rowspan="2">$i + j = 7$</td><td rowspan="2">Блоковано вектори з 7 нулями</td></tr>
<tr><td>f_4 Л</td><td>f_6 П</td></tr>
<tr><td>f_5 Л</td><td>f_7 П</td><td rowspan="8">$V_{21} \subset V_{12}$, $V_{22} \subset V_{12}$</td><td rowspan="4">$i = 2$</td><td rowspan="8">6</td><td rowspan="6">Блоковано вектори з 7 нулями</td></tr>
<tr><td>f_5 Л</td><td>f_8 Л</td></tr>
<tr><td>f_5 Л</td><td>f_8 П</td></tr>
<tr><td>f_5 Л</td><td>f_9 Л</td></tr>
<tr><td>f_6 Л</td><td>f_8 Л</td><td rowspan="4">$i = 1$</td></tr>
<tr><td>f_6 Л</td><td>f_8 П</td></tr>
<tr><td>f_6 Л</td><td>f_7 П</td><td rowspan="2">Блоковано вектори з 7 нулями (не проявилося)</td></tr>
<tr><td>f_6 Л</td><td>f_9 Л</td></tr>
</table>

У таблиці 2 наведено експериментально отриману кількість векторів, блокованих в результаті модифікації однієї функції (перші рядок та стовпець таблиці), а також двох різних функцій моделі, залежно від номерів цих функції та від того, які (праві або ліві) частини функцій були модифіковані. Літерами "П" та "Л" позначено відповідно модифікацію правої та лівої частини реберної функції. У деяких випадках модифікація не може бути виконана. Наприклад, у випадку модифікації лівої частини функції f_1 вираз $\kappa_{11}(3,3)$ має бути замінений виразом $\kappa_{11}(4,3)$, для чого необхідно побудувати модель $K_{11}(4,3)$, що не є можливим. Стовчики та рядки, що відповідають таким ситуаціям у таблиці відсутні.

В кожне поле таблиці записується кількість векторів, блокованих в результаті відповідної модифікації. Причому, якщо блокованими є тільки вектори з 6 нулями, то в таблицю записується одне число. Якщо ж крім них блокуються ще й вектори з 7 нулями, то в таблицю записується два числа, верхнє з яких відповідає кількості векторів з 6 нулями, а нижнє – кількості векторів з 7 нулями.

У таблиці виділені ситуації, коли кількість векторів з 6 нулями, блокованих в результаті модифікації двох функцій, відрізняється від суми кількостей векторів, які блокуються внаслідок модифікації відповідних функцій окремо. Також виділені ситуації, у яких були блоковані вектори з 7 нулями. В таблиці 3 наведений аналіз всіх цих ситуацій і зазначені причини їхнього виникнення.

Як бачимо, всі випадки, в яких мав місце побічний ефект, відповідають невиконанню сформульованих у статті умов. В окремих випадках побічний ефект може й не проявитися, виконання ж умов дозволяє гарантовано його уникнути.

Висновки

Розглянуто модифікацію GL-моделей шляхом зміни двох реберних функцій одночасно. Сформульовано умови, які дозволяють розробнику вибирати функції, що підлягають модифікації при вирішенні задачі підвищення надійності ВБС за рахунок блокування відмов системи при появі векторів стану з підвищеною кратністю відмов процесорів, – підхід, що не потребує введення в систему додаткових процесорів.

Список літератури

1. Коваленко А. Е., Гула В. В. Отказоустойчивые микропроцессорные системы — К. : Техніка, 1986. — 150 с.

2. Kuo W., Zuo M. Optimal Reliability Modeling — John Willey & Sons, 2002. — 560 p.

3. Романкевич А.М., Карачун Л.Ф., Романкевич В.А. Графо-логические модели для анализа сложных отказоустойчивых вычислительных систем // Электронное моделирование. – Т.23, №1. – 2001. – С.102-111.

4. Романкевич В.А., Потапова Е.Р., Бахтари Хедаятоллах, Назаренко В.В. GL-модель поведения отказоустойчивых многопроцессорных систем с минимальным числом теряемых рёбер // Вісник НТУУ "КПІ". – Інформатика, управління та ОТ. – №45. – 2006. – С.93-100.

5. Романкевич А.М., Романкевич В.А., Мораведж Сейед Милад О повышении надёжности реконфигурируемых отказоустойчивых систем управления сложными объектами // Электронное моделирование.- т.32, №4.- 2010.- с.85-92.

6. Романкевич В.А., Морозов К.В., Фесенюк А.П. Об одном методе модификации рёберных функций GL-моделей // Радіоелектронні і комп'ютерні системи.-№6, 2014.- С.95-99.

Відомості про авторів

Морозов Костянтин В'ячеславович, аспірант кафедри Системного програмування і спеціалізованих комп'ютерних систем, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», пр-т Перемоги, 37, Київ, 03056 Тел.: (044)-2363202.

Романкевич Віталій Олексійович, к.т.н., доцент, доцент кафедри Системного програмування і спеціалізованих комп'ютерних систем, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», пр-т Перемоги, 37, Київ, 03056 Тел.: (044)-2363202.

Потапова Катерина Романівна, к.т.н., доцент, доцент кафедри Системного програмування і спеціалізованих комп'ютерних систем, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», пр-т Перемоги, 37, Київ, 03056 Тел.: (044)-2363202.