УДК 681.5.015:007

Г.Б. РАКИТЯНСЬКА

Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

НЕЙРО-МЕРЕЖЕВИЙ ПІДХІД ДО ГЕНЕРУВАННЯ СПОЛУЧЕНИХ НЕЧІТКИХ БАЗ ЗНАНЬ НА ПРАВИЛАХ І ВІДНОШЕННЯХ

Анотація. Пропонується підхід до генерування сполучених правил ЯКЩО-ТО на основі генетико-нейронного алгоритму розв'язання рівнянь нечітких відношень, що дозволяє уникнути селекції правил і виключити перекриття між класами. Суть підходу полягає у побудові та навчанні *min-max* нейро-нечіткої мережі, ізоморфної лінгвістичним розв'язкам системи рівнянь нечітких відношень, яка дозволяє адаптувати структуру набору правил до змінення границь класів виходу. Розв'язання рівнянь нечітких відношень забезпечує оптимальну кількість нечітких правил для кожного вихідного терму і оптимальну геометрію вхідних термів для кожного лінгвістичного розв'язку.

Ключові слова: нечіткі правила і відношення, рівняння нечітких відношень, *min-max* нейронна мережа.

Аннотация. Предлагается подход к генерированию составных правил ЕСЛИ-ТО на основе генетико-нейронного алгоритма решения уравнений нечетких отношений, что позволяет избежать селекции правил и исключить перекрытие между классами. Суть подхода состоит в построении и обучении *min-max* нейро-нечеткой сети, изоморфной лингвистическим решениям системы уравнений нечетких отношений, которая позволяет адаптировать структуру набора правил к изменению границ классов выхода. Решение уравнений нечетких отношений обеспечивает оптимальное число нечетких правил для каждого выходного терма и оптимальную геометрию входных термов для каждого лингвистического решения.

Ключевые слова: нечеткие правила и отношения, уравнения нечетких отношений, *min-max* нейронная сеть

Abstract. The adaptive approach to generating composite IF-THEN rules based on the genetic and neural algorithm of solving fuzzy relational equations is proposed. It allows us to avoid rules selection and eliminate overlaps between classes. The essence of the approach is in constructing and training the specific *min-max* neuro-fuzzy network isomorphic to linguistic solutions of fuzzy relational equations, which allows adaptation of the rules set structure while the output classes' bounds are changing. Resolution of fuzzy relational equations guarantees the optimal number of fuzzy rules for each output fuzzy term and the optimal geometry of input fuzzy terms for each linguistic solution.

Key words: fuzzy rules and relations, fuzzy relational equations, *min-max* neural network.

Вступ

Нейро-мережевий підхід до здобування нечітких правил із експериментальних даних базується на генеруванні гіпербоксів [1]. Генерування правил у нейронних мережах на основі радіальних базисних функцій (RBF) [2], поєднане з навчанням машин опорних векторів (SVM), дозволяє визначити геометрію гіпербоксів [3]. Режим навчання у таких *min-max* нейронних мережах полягає у розширенні/стисненні гіпербоксів [1, 3]. Небажаним ефектом розширення гіпербоксів є їх перекриття, коли один образ повністю належить до двох або більше класів. Зменшення зон перекриття потребує більшої кількості гіпербоксів. Налаштування структури мережі полягає у відборі гіпербоксів шляхом їх об'єднання/розбиття, тобто селекції правил із множини правил-кандидатів.

Актуальність

На сьогодні проблема селекції і оптимізації структури правил не має єдиного методичного стандарту вирішення. В цій статті пропонується підхід до генерування правил, виражений математично в термінах рівнянь нечітких відношень [4 – 6]. Система правил ЯКЩО-ТО може бути перетворена до множини лінгвістичних розв'язків рівнянь нечітких відношень шляхом переходу до сполучених нечітких термів [7, 8], де міра значимості терму І рівня (*підвищення, падіння*) описується термом ІІ рівня (*значне підвищення, суттєве падіння*). Такий перехід дозволяє з'єднати терми І рівня нечіткими відношеннями, а терми ІІ рівня – нечіткими правилами, які є якісними розв'язками рівнянь нечітких відношень для заданих класів виходу [7]. В цьому випадку задача здобування правил зводиться до розв'язання рівнянь нечітких відношень, що дозволяє уникнути селекції правил і виключити перекриття між класами. Розв'язання рівнянь нечітких відношень забезпечує оптимальну кількість нечітких правил для кожного вихідного терму і оптимальну геометрію вхідних термів для кожного лінгвістичного розв'язку.

Мета

Мета роботи полягає у побудові та навчанні *min-max* нейронної мережі, ізоморфної сполученій базі знань, яка дозволяє адаптувати структуру набору правил до змінення границь класів виходу. Для випадку генерування правил узагальнений генетико-нейронний алгоритм розв'язання рівнянь нечітких відношень [9]. Початкова структура мережі встановлюється за допомогою генетичного алгоритму [10].

Апроксимація нечіткими правилами і відношеннями

Розглядається об'єкт виду $y = f(\mathbf{X})$ з n входами $\mathbf{X} = (x_1,...,x_n)$ і одним виходом y, для якого є відомими:

- інтервал змінення входів і виходу $x_i \in [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$, $i = \overline{1,n}$; $y \in [\underline{y}, \overline{y}]$;

- система матриць нечітких відношень $\mathbf{R}_i \subseteq c_{il} \times E_J = [r_{il}^J$, $i = \overline{1,n}$, $l = \overline{1,k_i}$, $J = \overline{1,M}$], яка зв'язує терми І рівня c_{il} і E_J змінних x_i і y, відповідно;

- класи рішень d_j для правил, $d_j \in [\underline{y}_{j-1}^r, \underline{y}_j^r]$, $j = \overline{1,m}$;
- навчальна вибірка у вигляді L пар «входи – вихід» $\left\langle \hat{\mathbf{X}}_s, \hat{y}_s \right\rangle$, $s = \overline{1,L}$, де $\hat{\mathbf{X}}_s = (\hat{x}_1^s, ..., \hat{x}_n^s)$ і $\hat{y}_s$ – вектор значень вхідних і значення вихідної змінної в експерименті з номером s.

Необхідно синтезувати знання про об’єкт у вигляді сполученої нечіткої бази знань:

i. $$\bigcup_{p=\overline{1,z_j}} \left[\bigcap_{i=\overline{1,n}} \left\{ \bigcup_{l=\overline{1,k_i}} (x_i = c_{il} \cap \mu^{c_{il}} = \alpha_{il}^{jp}) \right\} \right] \to y = d_j,\ j = \overline{1,m}, \tag{1}$$

де $\mu^{c_{il}}$ – міра значимості терму c_{il}; α_{il}^{jp} – терм II рівня, який описує міру значимості $\mu^{c_{il}}$ в правилі з номером $p = \overline{1,z_j}$; z_j – кількість правил у класі d_j, $j = \overline{1,m}$.

При наявності матриць $\mathbf{R}_i$, $i = \overline{1,n}$, залежність «входи – вихід» описується за допомогою розширеного композиційного правила виведення [4]

$$\boldsymbol{\mu}^E(y) = \boldsymbol{\mu}^{A_1}(x_1) \circ \mathbf{R}_1 \cap ... \cap \boldsymbol{\mu}^{A_n}(x_n) \circ \mathbf{R}_n, \tag{2}$$

де $\boldsymbol{\mu}^{A_i}(x_i) = (\mu^{c_{i1}}, ..., \mu^{c_{ik_i}})$ – вектор мір значимостей нечітких термів c_{il}, $i = \overline{1,n}$, $l = \overline{1,k_i}$; $\boldsymbol{\mu}^E(y) = (\mu^{E_1}, ..., \mu^{E_M})$ – вектор мір значимостей нечітких термів E_J, $J = \overline{1,M}$.

Із (2) випливає система рівнянь нечітких відношень, яка зв’язує функції належності нечітких термів I рівня вхідних і вихідної змінної:

$$\mu^{E_J}(y) = \min_{i=\overline{1,n}} \left\{ \max_{l=\overline{1,k_i}} \left[\min(\mu^{c_{il}}(x_i), r_{il}^J) \right] \right\},\ J = \overline{1,M}. \tag{3}$$

Із сполученої бази знань (1) випливає система розв’язків рівнянь нечітких відношень (3) [10]:

$$\bigcup_{p=\overline{1,z_j}} \left[\bigcap_{i=\overline{1,n}} \left\{ \bigcup_{l=\overline{1,k_i}} (\mu^{c_{il}}(x_i) = \alpha_{il}^{jp}) \right\} \right] \to \mu^{D_j}(y) = \delta_j,\ j = \overline{1,m}, \tag{4}$$

де D_j – терм I рівня, який описує змінну y в класі d_j, $D_j \in \{E_1, ..., E_M\}$; μ^{D_j} – міра значимості терму D_j; δ_j – терм II рівня, який описує міру значимості μ^{D_j}.

Перехід від термів α_{il}^{jp}, що описують міри значимостей $\mu^{c_{il}}$, до термів a_{il}^{jp}, що описують змінні x_i, дозволив отримати лінгвістичні розв’язки в системі нечітких відношень:

$$\bigcup_{p=\overline{1,z_j}} \left[\bigcap_{i=\overline{1,n}} \left\{ \bigcup_{l=\overline{1,k_i}} (x_i = a_{il}^{jp}) \right\} \right] \to y = d_j,\ j = \overline{1,m}, \tag{5}$$

де a_{il}^{jp} =(c_{il}, α_{il}^{jp}) – сполучений терм, що описує змінну x_i, $i = \overline{1,n}$, $l = \overline{1,k_i}$, в правилі з номером jp.

ii. Нечіткій базі знань (5) відповідають нечіткі логічні рівняння, які зв’язують функції належності сполучених термів у розв’язках системи (3):

$$\mu^{d_j}(y) = \max_{p=\overline{1,z_j}} \left[w_{jp} \cdot \min_{i=\overline{1,n}} \left\{ \max_{l=\overline{1,k_i}} (v_{il}^{jp} \cdot \mu^{a_{il}^{jp}}(x_i)) \right\} \right],\ j = \overline{1,m}, \tag{6}$$

де $\mu^{d_j}(y)$ і $\mu^{a_{il}^{jp}}(x_i)$ – функції належності змінної y і x_i до сполучених термів $d_j=(D_j,\delta_j)$ і $a_{il}^{jp}=(c_{il},\alpha_{il}^{jp})$; w_{jp} – вага правила з номером jp; v_{il}^{jp} – вага терму у розв’язку з номером jp.

У нечітких логічних рівняннях використовується така функція належності нечіткого терму T:

$$\mu^T(u)=1\big/\left(1+\left((u-\beta)/\sigma\right)^2\right), \tag{7}$$

де β – координата максимуму функції, $\mu^T(\beta)=1$; σ – параметр концентрації [6].

Для правил операція дефазифікації виконується за формулою [6]:

$$y=\sum_{j=1}^{m}\underline{y}_j^r\cdot\mu^{d_j}(y)\Bigg/\sum_{j=1}^{m}\mu^{d_j}(y) \ . \tag{8}$$

Якщо правила (5) є розв’язками системи рівнянь нечітких відношень (3), то для якісних значень входів $x_i=a_{il}^{jp}$ і виходу $y=d_j$ у розв’язку з номером jp виконується співвідношення:

$$\mu^{E_J}(d_j)=\underset{i=1,n}{\underline{min}}\left\{\underset{l=1,k_i}{\underline{max}}\left[min(\mu^{c_{il}}(a_{il}^{jp}),r_{il}^{J})\right]\right\},$$

де $\mu^{E_J}(d_j)$ і $\mu^{c_{il}}(a_{il}^{jp})$ – степені належності значень $x_i=a_{il}^{jp}$ і $y=d_j$ до нечітких термів E_J і c_{il}.

Тоді виникає обернена задача, яка ставиться таким чином: для класів виходу $y=d_j$, $j=\overline{1,m}$, знайти кількість правил z_j і відновити форми функцій належності входів $x_i=a_{il}^{jp}$ у кожному правилі.

Задача здобування нечітких правил

Співвідношення (3) – (8) визначають загальний вид нечіткої моделі об’єкта в системі правил і відношень таким чином:

$$\boldsymbol{\mu}^E(y)=f_R(\mathbf{X},\mathbf{R},\mathbf{B}_C,\boldsymbol{\Omega}_C,\mathbf{B}_E,\boldsymbol{\Omega}_E), \tag{9}$$

$$y=f_r(\mathbf{X},f_R,Z,q,\mathbf{V},\mathbf{W},\mathbf{B}_a,\boldsymbol{\Omega}_a,\mathbf{B}_d,\boldsymbol{\Omega}_d), \tag{10}$$

де $\mathbf{B}_C=(\beta^{c_{i1}},...,\beta^{c_{ik_i}})$, $\boldsymbol{\Omega}_C=(\sigma^{c_{i1}},...,\sigma^{c_{ik_i}})$ – вектори параметрів функцій належності нечітких термів c_{il}, $i=\overline{1,n}$, $l=\overline{1,k_i}$; $\mathbf{B}_E=(\beta^{E_1},...,\beta^{E_M})$, $\boldsymbol{\Omega}_E=(\sigma^{E_1},...,\sigma^{E_M})$ – вектори параметрів функцій належності нечітких термів E_J, $J=\overline{1,M}$; $\mathbf{W}=(w_1,...,w_Z)$ – вектор ваг правил; Z – число правил; $\mathbf{V}=(v_1,...,v_q)$ – вектор ваг термів; q – число термів; $\mathbf{B}_a=(\beta^{a_1},...,\beta^{a_q})$, $\boldsymbol{\Omega}_a=(\sigma^{a_1},...,\sigma^{a_q})$ – вектори параметрів функцій належності нечітких термів a_k, $k=\overline{1,q}$; $\mathbf{B}_d=(\beta^{d_1},...,\beta^{d_m})$, $\boldsymbol{\Omega}_d=(\sigma^{d_1},...,\sigma^{d_m})$ – вектори параметрів функцій належності нечітких термів d_j, $j=\overline{1,m}$; F_R і F_r – оператори зв’язку «входи-вихід», що відповідають формулам (3), (7) і (6) – (8), відповідно.

Для заданої системи нечітких відношень, задача здобування нечітких правил формулюється так. Необхідно знайти таку кількість правил Z і термів q, а також такі вектори ваг правил $\mathbf{W}$, ваг термів $\mathbf{V}$ та вектори параметрів функцій належності входів і виходу $\mathbf{B}_a,\boldsymbol{\Omega}_a,\mathbf{B}_d,\boldsymbol{\Omega}_d$, які забезпечують мінімальну відстань між модельним і експериментальним виходами об’єкта:

$$\sum_{s=1}^{L}\left[f_r(\hat{\mathbf{X}}_s,f_R,Z,q,\mathbf{W},\mathbf{V},\mathbf{B}_a,\boldsymbol{\Omega}_a,\mathbf{B}_d,\boldsymbol{\Omega}_d)-\hat{y}_s\right]^2=\underset{Z,q,\mathbf{W},\mathbf{V},\mathbf{B}_a,\boldsymbol{\Omega}_a,\mathbf{B}_d,\boldsymbol{\Omega}_d}{min} \ . \tag{11}$$

Здобування лінгвістичних розв'язків системи рівнянь нечітких відношень

Елементами розв'язків (4) рівнянь нечітких відношень (3) є значення вхідних змінних x_i, $i=\overline{1,n}$, для яких $\mu^{c_{il}}(x_i)=\alpha_{il}^{jp}$, $p=\overline{1,z_j}$. Ці значення інтерпретуються як координати максимуму функцій належності нечітких термів a_{il}^{jp}, що описують змінну x_i в правилі jp, $p=\overline{1,z_j}$, бази знань (5), де значенню виходу $y=d_j$, $j=\overline{1,m}$, відповідає z_j лінгвістичних розв'язків системи (3).

Нехай $\mathbf{B}_j=(\beta_1^j,...,\beta_N^j)=(\beta_{11}^j,...,\beta_{1k_1}^j,...,\beta_{n1}^j,...,\beta_{nk_n}^j)$ – вектор координат максимуму функцій належності нечітких термів у правилі в класі $y=d_j$, $j=\overline{1,m}$. Слідуючи [6, 9, 10], задача розв'язання рівнянь нечітких відношень (3) формулюється так. Для кожного класу виходу $y=d_j$, $j=\overline{1,m}$, знайти вектор координат максимуму $\mathbf{B}_j=(\beta_1^j,...,\beta_N^j)$, $\beta_{il}^j\in[\underline{x}_i,\overline{x}_i]$, $i=\overline{1,n}$, який забезпечує мінімальну відстань між лівою і правою частиною кожного рівняння системи (3):

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{J=1}^{M}\left[\mu^{E_J}(d_j)-\underset{i=\overline{1,n}}{min}\left[\underset{l=\overline{1,k_i}}{max}\Big(min(\mu^{c_{il}}(\beta_{il}^j),r_{il}^J)\Big)\right]\right]^2=\underset{\boldsymbol{\mu}^C(\mathbf{B}_j)}{min}. \quad (12)$$

Для кожного класу d_j система рівнянь (3) має множину розв'язків $S_j(\mathbf{R},\boldsymbol{\mu}^E(d_j))$, яка визначається множиною максимальних розв'язків $\overline{S}_j^*=\{\overline{\boldsymbol{\mu}}^C(\overline{\mathbf{B}}_{jh}),\ h=\overline{1,\overline{z}_j}\}$ і множиною мінімальних розв'язків $\underline{S}_j^*=\{\underline{\boldsymbol{\mu}}^C(\underline{\mathbf{B}}_{js}),\ s=\overline{1,\underline{z}_j}\}$. При цьому кожному максимальному розв'язку $\overline{\boldsymbol{\mu}}^C(\overline{\mathbf{B}}_{jh})\in\overline{S}_j^*$, який визначає верхній опорний вектор $\overline{\mathbf{B}}_{jh}$, відповідає множина мінімальних розв'язків $\underline{S}_j^*=\{\underline{\boldsymbol{\mu}}^C(\underline{\mathbf{B}}_{js}),\ s=\overline{1,\underline{z}_j}\}$, яка визначає множину нижніх опорних векторів $\underline{\mathbf{B}}_{js}$ [10]:

$$S_j(\mathbf{R},\boldsymbol{\mu}^E(d_j))=\bigcup_{\overline{\boldsymbol{\mu}}^C(\overline{\mathbf{B}}_{jh})\in\overline{S}_j^*}\ \bigcup_{\underline{\boldsymbol{\mu}}^C(\underline{\mathbf{B}}_{js})\in\underline{S}_j^*}\left[\underline{\boldsymbol{\mu}}^C(\underline{\mathbf{B}}_{js}),\overline{\boldsymbol{\mu}}^C(\overline{\mathbf{B}}_{jh})\right],\ j=\overline{1,m}. \quad (13)$$

Тут $\overline{\mathbf{B}}_{jh}=(\overline{\beta}_1^{jh},...,\overline{\beta}_N^{jh})$ і $\underline{\mathbf{B}}_{js}=(\underline{\beta}_1^{js},...,\underline{\beta}_N^{js})$ – вектори верхніх і нижніх границь координат максимуму β_I^{jp}, де операція об'єднання виконується над усіма $\overline{\boldsymbol{\mu}}^C(\overline{\mathbf{B}}_{jh})\in\overline{S}_j^*$ і $\underline{\boldsymbol{\mu}}^C(\underline{\mathbf{B}}_{js})\in\underline{S}_j^*$.

Слідуючи [10], формування інтервалів (13) здійснюється шляхом багаторазового розв'язання задачі оптимізації (12) і починається з пошуку її нульових розв'язків $\mathbf{B}_{j0}=(\beta_1^{j0},...,\beta_N^{j0})$, $j=\overline{1,m}$.

Верхня границя ($\overline{\beta}_I^{jh}$) для $h=1$ знаходиться в діапазоні $[\beta_I^{j0},1]$, а для $h>1$ – в діапазоні $[max(\underline{\beta}_I^{jp}),1]$, $p<s$, причому максимальні розв'язки $\overline{\beta}_I^{jp}$, $p<h$, вилучаються із області пошуку. Нижня границя ($\underline{\beta}_I^{js}$) для $s=1$ знаходиться в діапазоні $[0,\beta_I^{j0}]$, а для $s>1$ – в діапазоні $[0,min(\overline{\beta}_I^{jp})]$, $p<h$, причому мінімальні розв'язки $\underline{\beta}_I^{jp}$, $p<s$, вилучаються із області пошуку.

Нехай $\mathbf{B}_j(t)=(\beta_1^j(t),...,\beta_N^j(t))$ – розв'язок задачі оптимізації (12) на *t*-ому кроці формування інтервалів, тобто $F(\mathbf{B}_j(t))=F(\mathbf{B}_{j0})$, оскільки для всіх $\boldsymbol{\mu}^C(\mathbf{B}_j)\in S(\mathbf{R},\boldsymbol{\mu}^E(d_j))$ значення критерію (12) однакове. При пошуку верхніх границь передбачається, що $\beta_I^j(t)\geq\beta_I^j(t-1)$, а при пошуку нижніх границь передбачається, що $\beta_I^j(t)\leq\beta_I^j(t-1)$. Встановлення верхніх (нижніх) границь здійснюється за правилом: якщо $\mathbf{B}_j(t)\neq\mathbf{B}_j(t-1)$, то $\overline{\beta}_I^{jh}$ ($\underline{\beta}_I^{js}$)=$\beta_I^j(t)$. Якщо $\mathbf{B}_j(t)=\mathbf{B}_j(t-1)$, то формування розв’язку $[\underline{\mathbf{B}}_{js}, \overline{\mathbf{B}}_{jh}]$ припиняється. Пошук інтервалів (13) продовжується, поки виконується умова $\overline{\mathbf{B}}_{jh} \neq \overline{\mathbf{B}}_{jp}$, $p < h$, для верхніх границь і $\underline{\mathbf{B}}_{js} \neq \underline{\mathbf{B}}_{jp}$, $p < s$, для нижніх границь.

Адаптивне здобування нечітких правил

В цьому розділі пропонується спосіб представлення лінгвістичної інформації про об’єкт у вигляді спеціальної нейро-нечіткої мережі, ізоморфної сполученій базі знань (1). Структура такої мережі представлена на рис.1. Нейро-нечітка модель отримана шляхом імплантації розв’язків системи рівнянь нечітких відношень в нейронну мережу таким чином, що вагами дуг, які підлягають навчанню, є параметри функцій належності і ваги правил. Мережа на рис. 1 навчається в двох режимах. Перший режим забезпечує налаштування структури правил шляхом розв’язання системи рівнянь нечітких відношень (3). Другий режим забезпечує налаштування параметрів правил - розв’язків.

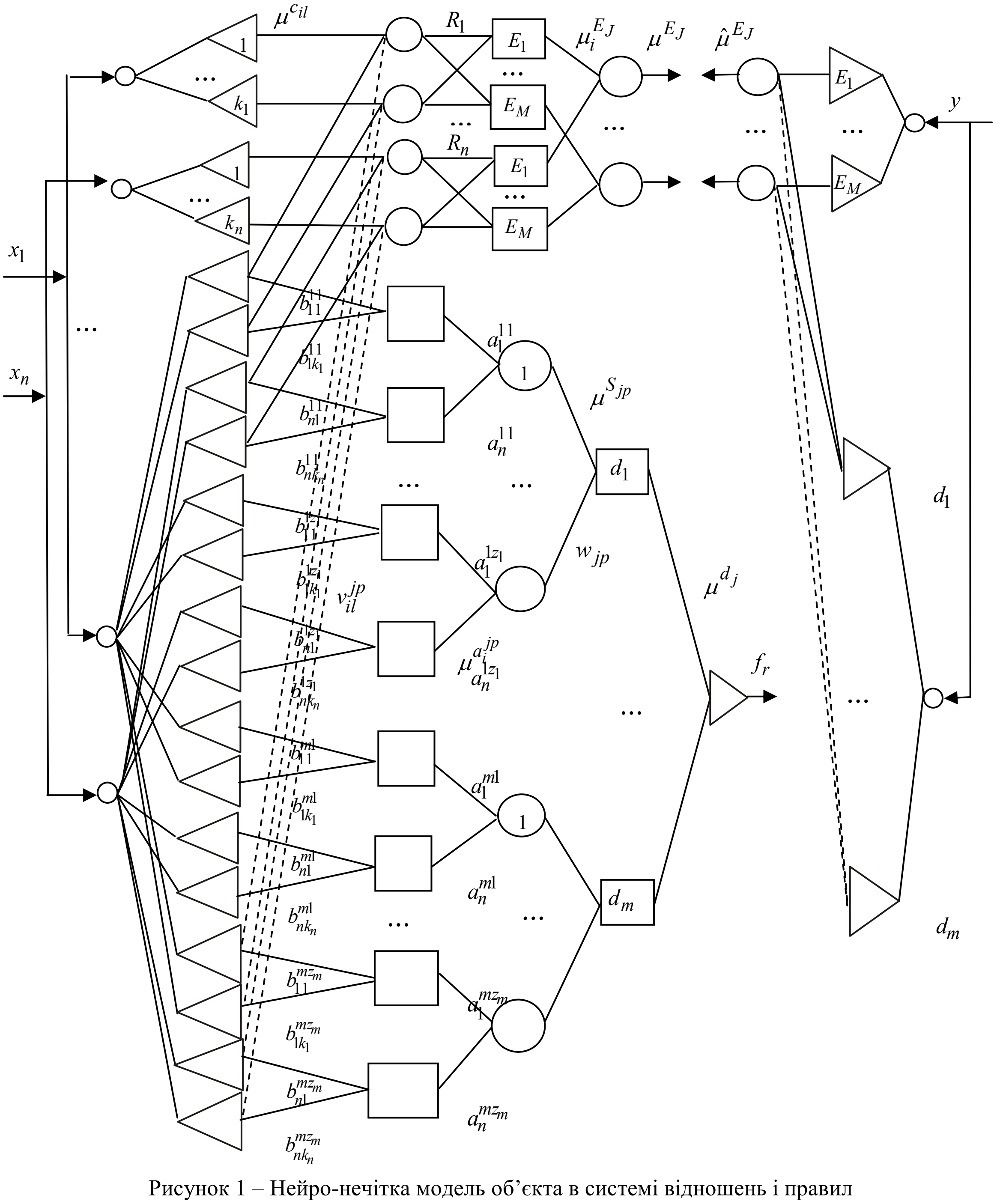


Рисунок 1 – Нейро-нечітка модель об’єкта в системі відношень і правил

Нейро-нечітка мережа для настройки структури правил має п'ять шарів: входи об'єкта (*шар 1*); операція фазифікації для термів І рівня у відношеннях і термів ІІ рівня у правилах (*шар 2*); операція *min* для підстановки сполучених термів у рівняння нечітких відношень (*шар 3*); операція *max* над функціями належності виходу для відношень R_i (*шар 4*); операція *min* над функціями належності виходу (*шар 5*).

Кількість вузлів в кожному шарі нейро-нечіткої мережі визначається так: по кількості входів об'єкта x_i, $i=\overline{1,n}$ (*шар 1*); по кількості термів І рівня, $k_1+...+k_n$, і кількості термів ІІ рівня, $N\cdot(z_1+...+z_m)$ (*шар 2*); по кількості термів І рівня, $k_1+...+k_n$ (*шар 3*); по кількості класів виходу для відношень R_i, $n\cdot M$ (*шар 4*); по кількості класів виходу E_J, $J=\overline{1,M}$ (*шар 5*).

Для настройки структури нечітких правил використовуються рекурентні співвідношення:

$$\beta_{il}^{jp}(t+1)=\beta_{il}^{jp}(t)-\eta\frac{\partial\varepsilon_t^s}{\partial\beta_{il}^{jp}(t)}, \tag{14}$$

які мінімізують критерій

$$\varepsilon_t^s=(\hat{\boldsymbol{\mu}}^E(t)-\boldsymbol{\mu}^E(t))^2\big/2,$$

де $\hat{\boldsymbol{\mu}}^E(t)$ ($\boldsymbol{\mu}^E(t)$) – експериментальний (теоретичний) вектор мір значимостей вихідних термів системи рівнянь (3) на *t*-му кроці навчання; β_{il}^{jp} (*t*) – координати максимуму функцій належності нечітких термів вхідних змінних на *t*-му кроці навчання.

Частинні похідні, що входять у співвідношення (14), характеризують чутливість похибки ε_t^s до змінення параметрів нейро-нечіткої мережі і обчислюються таким чином:

$$\frac{\partial\varepsilon_t^s}{\partial\beta_{il}^{jp}}=\sum_{J=1}^{M}\left[\frac{\partial\varepsilon_t^s}{\partial\mu^{E_J}}\cdot\frac{\partial\mu^{E_J}}{\partial\mu_i^{E_J}}\cdot\frac{\partial\mu_i^{E_J}}{\partial\mu^{c_{il}}}\cdot\frac{\partial\mu^{c_{il}}}{\partial\beta_{il}^{jp}}\right].$$

Оскільки при визначенні елемента «нечіткий вихід» присутні нечітко-логічні операції *min* і *max,* то співвідношення для навчання отримані за допомогою кінцево-різницевих схем [9].

Нейро-нечітка мережа для настройки параметрів правил має шість шарів: входи об'єкта (*шар 1*); фазифікація для нечітких термів ІІ рівня у лінгвістичних розв'язках (*шар 2*); операція *max* для злиття термів у лінгвістичних розв'язках (*шар 3*); операція *min* для лінгвістичних правил-розв'язків (*шар 4*); операція *max* для класів розв'язків (*шар 5*); операція дефазифікації (*шар 6*).

Кількість вузлів в кожному шарі нейро-нечіткої мережі визначається так: по кількості входів об'єкта x_i, $i=\overline{1,n}$ (*шар 1*); по кількості термів у лінгвістичних розв'язках, $N\cdot(z_1+...+z_m)$ (*шар 2*); по кількості об'єднаних термів у базі знань, $n\cdot(z_1+...+z_m)$ (*шар 3*); по кількості розв'язків S_{jp} в кожному класі виходу, $z_1+...+z_m$ (*шар 4*); по кількості класів виходу d_j, $j=\overline{1,m}$ (*шар 5*).

Для настройки параметрів нечітких правил використовуються рекурентні співвідношення:

$$w_{jp}(t+1)=w_{jp}(t)-\eta\frac{\partial\varepsilon_t^r}{\partial w_{jp}(t)},\ \nu_{il}^{jp}(t+1)=\nu_{il}^{jp}(t)-\eta\frac{\partial\varepsilon_t^r}{\partial\nu_{il}^{jp}(t)},\ \sigma_{il}^{jp}(t+1)=\sigma_{il}^{jp}(t)-\eta\frac{\partial\varepsilon_t^r}{\partial\sigma_{il}^{jp}(t)}, \tag{15}$$

які мінімізують критерій

$$\varepsilon_t^r=(\hat{y}_t^r-y_t^r)^2\big/2,$$

де $\hat{y}_t^r$ (y_t^r) – експериментальний (теоретичний) вихід об'єкта для нечітких правил на *t*-му кроці навчання; $w_{jp}(t)$, $\nu_{il}^{jp}(t)$ – ваги нечітких правил і термів на *t*-му кроці навчання; σ_{il}^{jp} (*t*) – параметри концентрації функцій належності нечітких термів вхідних змінних на *t*-му кроці навчання.

Частинні похідні, що входять в співвідношення (15), характеризують чутливість похибки ε_t^r до змінення параметрів нейро-нечіткої мережі і обчислюються таким чином:

$$\frac{\partial\varepsilon_t^r}{\partial w_{jp}} = \varepsilon_1\,\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\frac{\partial\mu^{d_j}(\mathbf{X})}{\partial w_{jp}};\quad \frac{\partial\varepsilon_t^r}{\partial v_{il}^{jp}} = \varepsilon_1\,\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\cdot\frac{\partial\mu^{a_i^{jp}}(x_i)}{\partial v_{il}^{jp}};\quad \frac{\partial\varepsilon_t^r}{\partial\sigma^{b_{il}^{jp}}} = \varepsilon_1\,\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5\cdot\frac{\partial\mu^{b_{il}^{jp}}(x_i)}{\partial\sigma^{b_{il}^{jp}}};$$

де $\varepsilon_1 = \frac{\partial\varepsilon_t^r}{\partial y}$; $\varepsilon_2 = \frac{\partial y}{\partial\mu^{d_j}(\mathbf{X})}$; $\varepsilon_3 = \frac{\partial\mu^{d_j}(\mathbf{X})}{\partial\mu^{S_{jp}}(\mathbf{X})}$; $\varepsilon_4 = \frac{\partial\mu^{S_{jp}}(\mathbf{X})}{\partial\mu^{a_i^{jp}}(x_i)}$; $\varepsilon_5 = \frac{\partial\mu^{a_i^{jp}}(x_i)}{\partial\mu^{b_{il}^{jp}}(x_i)}$.

Комп'ютерний експеримент

Експериментальні дані про об'єкт генерувались моделлю «два входи – один вихід» (рис. 2):

$$y = ((2z-0.9)(7z-1)(17z-19)(15z-2))/10,\quad z = ((x_1-3.0)^2+(x_2-2.5)^2)/40.$$

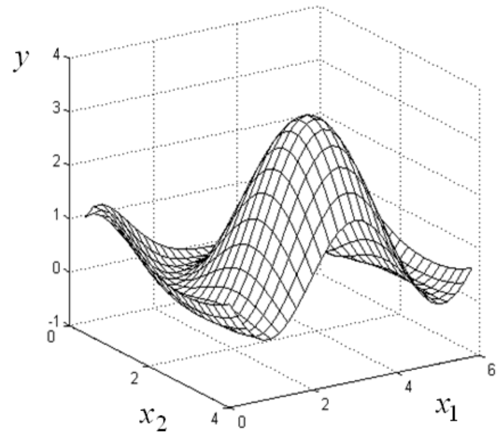


Рисунок 2 – Модель - генератор

Нечіткі відношення, здобуті із даних [6], представлені в табл. 1 разом з параметрами функцій належності нечітких термів I рівня: c_{11} (c_{21}) *зниження до 0*, c_{12} (c_{22}) *наближення до 3.0*, c_{13} *підвищення до 6.0* для x_1 і x_2; E_1 *зниження до 0*, E_2 *наближення до 1.0*, E_3 *підвищення до 3.5* для y.

Необхідно синтезувати правила, які описують об'єкт для $m = 5$. Границі класів $d_1 \div d_5$ були встановлені таким чином: $d_1 \in [0, 0.4)$; $d_2 \in [0.4, 0.9)$; $d_3 \in [0.9, 1.3)$; $d_4 \in [1.3, 2.5)$; $d_5 \in [2.5, 3.4]$.

Система рівнянь нечітких відношень для генерування правил - розв'язків має вигляд:

$$\begin{aligned}
\mu^{D_1} &= [(\mu^{c_{11}} \wedge 0.98) \vee (\mu^{c_{12}} \wedge 0.22) \vee (\mu^{c_{13}} \wedge 0.98)] \wedge [(\mu^{c_{21}} \wedge 0.29) \vee (\mu^{c_{22}} \wedge 0.96)]\\
\mu^{D_2} &= [(\mu^{c_{11}} \wedge 0.92) \vee (\mu^{c_{12}} \wedge 0.44) \vee (\mu^{c_{13}} \wedge 0.92)] \wedge [(\mu^{c_{21}} \wedge 0.89) \vee (\mu^{c_{22}} \wedge 0.30)]\\
\mu^{D_3} &= [(\mu^{c_{11}} \wedge 0.11) \vee (\mu^{c_{12}} \wedge 0.91) \vee (\mu^{c_{13}} \wedge 0.11)] \wedge [(\mu^{c_{21}} \wedge 0.12) \vee (\mu^{c_{22}} \wedge 0.94)].
\end{aligned} \quad (16)$$

Для кожного класу міри значимостей $\boldsymbol{\mu}^D(d_j)$ визначались за допомогою функцій належності нечітких термів $E_1 \div E_3$ і $d_1 \div d_5$, параметри яких представлені в Табл. 1 і 2:

$\boldsymbol{\mu}^D(d_1)$=(0.67, 0.30, 0.09); $\boldsymbol{\mu}^D(d_2)$=(0.40, 0.38, 0.10); $\boldsymbol{\mu}^D(d_3)$=(0.45, 0.80, 0.39);

$\boldsymbol{\mu}^D(d_4)$=(0.11, 0.30, 0.67); $\boldsymbol{\mu}^D(d_5)$=(0.14, 0.30, 0.90).

За допомогою генетичного алгоритму були отримані множини розв’язків для $\beta-$параметрів правил, які представлені в табл. 2. Набір правил в табл. 2 відповідає множині розв’язків рівнянь нечітких відношень (16), де терми II рівня асоціюються з інтервалами мір значимостей $\mu^{c_{il}}(\beta_{il}^{j})$, для яких значення критерію оптимізації (12) становить $F=0.0193$. Інтервали значень $\beta-$параметрів були визначені за допомогою функцій належності нечітких термів $c_{11}\div c_{13}$, c_{21}, c_{22}.

Таблиця 1 – Матриця нечітких відношень

	ЯКЩО входи	ТО вихід y		
		E_1, (0.02, 0.27)	E_2, (1.10, 0.29)	E_3, (3.40, 0.71)
x_1	c_{11}, (0, 0.71)	0.98	0.92	0.11
	c_{12}, (3.0, 0.92)	0.22	0.44	0.89
	c_{13}, (6.0, 0.70)	0.98	0.92	0.11
x_2	c_{21}, (0, 0.59)	0.29	0.89	0.12
	c_{22}, (3.0, 0.81)	0.96	0.38	0.94

Таблиця 2 – Множина значень $\beta-$параметрів правил після генетичної настройки

ЯКЩО										ТО
x_1						x_2				y
$\mu^{c_{11}}$	β_{11}^{j}	$\mu^{c_{12}}$	β_{12}^{j}	$\mu^{c_{13}}$	β_{13}^{j}	$\mu^{c_{21}}$	β_{21}^{j}	$\mu^{c_{22}}$	β_{22}^{j}	(β,σ)
0.67 [0, 0.67] [0.67, 1] [0, 1]	[0, 0.50] [0.50,6.0]	[0, 0.11] [0, 0.11] [0, 0.11] [0, 0.11]	[0, 0.40] [5.60,6.0]	[0,0.67] 0.67 [0, 1] [0.67, 1]	[5.50,6.0] [0, 5.50]	[0, 0.30] [0, 0.30] [0, 0.30] [0, 0.30]	0.90	[0.67, 1] [0.67, 1] 0.67 0.67	[2.43,3.57]	d_1, (0.35, 0.21)
0.40 [0, 0.40] [0.40, 1] [0, 1]	[0, 0.86] [0.86,6.0]	0.12 0.12 0.12 0.12	0.50 5.50	[0, 0.40] 0.40 [0, 1] [0.40, 1]	[5.15, 6.0] [0, 5.15]	0.38 0.38 0.38 0.38	0.75	[0.40, 1] [0.40, 1] 0.40 0.40	2.00 4.00	d_2, (0.52, 0.15)
0.80 [0, 0.80] [0.80, 1] [0, 1.0]	[0, 0.35]	0.39 0.39 0.39 0.39	1.85 4.15	[0, 0.80] 0.80 [0, 1] [0.80, 1]	[5.65, 6.0]	[0.80, 1] [0.80, 1] 0.80 0.80	[0,0.30]	0.45 0.45 0.45 0.45	2.10 3.90	d_3, (1.27, 0.90)
[0, 0.22] [0, 0.22]		0.67 [0.67, 1]	[2.36,3.64]	[0, 0.22] [0, 0.22]		[0, 0.30] [0, 0.30]		[0.67, 1] 0.67	[2.43,3.57]	d_4, (2.46, 0.64)
[0, 0.22] [0, 0.22]		0.90 [0.90, 1]	[2.70,3.30]	[0, 0.22] [0, 0.22]		[0, 0.30] [0, 0.30]		[0.90, 1] 0.90	[2.73,3.27]	d_5, (2.82, 0.87)

Нехай кількість класів для правил збільшена до $m=6$ за рахунок нових класів d_{21} і d_{22}, на які був поділений клас d_2. Уточнені границі класів становлять: $d_1 \in$ [0, 0.3); $d_{21} \in$ [0.3, 0.6); $d_{22} \in$ [0.6, 0.9). Для решти класів границі не змінились.

Для нових класів міри значимостей $\boldsymbol{\mu}^{D}(d_j)$ визначались за допомогою функцій належності нечітких термів $E_1 \div E_3$ і d_1, d_{21}, d_{22}, параметри яких представлені в табл. 1 і 3:

$$\boldsymbol{\mu}^{D}(d_1)=(0.76, 0.28, 0.15);\ \boldsymbol{\mu}^{D}(d_{21})=(0.51, 0.45, 0.11);\ \boldsymbol{\mu}^{D}(d_{22})=(0.20, 0.38, 0.10).$$

Шляхом нейронної підстройки границь розв’язків в табл. 2_були отримані множини розв’язків для $\beta-$параметрів правил, представлені в табл. 3. Уточнений набір правил для нових класів d_1, d_{21} і d_{22} в табл. 3 відповідає множині розв’язків рівнянь нечітких відношень (16), для яких значення критерію оптимізації (12) становить $F=0.0271$.

Лінгвістична інтерпретація інтервалів $\beta-$параметрів представлена в табл. 4. Результати генетико-нейронної настройки параметрів отриманого набору правил представлені в табл. 5 і табл. 6.

Здобуті відношення і правила забезпечують апроксимацію об’єкта, яка показана на рис. 3. Точність виведення для відношень становить на рівні $RMSE = 0.6012$. Точність виведення для правил після генетичної настройки становить на рівні $RMSE = 0.3805$ при $Z = 16$, а після нейронної настройки становить на рівні $RMSE = 0.2402$ при $Z = 21$.

Таблиця 3 – Множина значень $\beta-$ параметрів правил після нейронної настройки

<table>
<tr><td colspan="10">ЯКЩО</td><td>ТО</td></tr>
<tr><td colspan="6">x_1</td><td colspan="4">x_2</td><td>y</td></tr>
<tr><td>$\mu^{c_{11}}$</td><td>β_{11}^{j}</td><td>$\mu^{c_{12}}$</td><td>β_{12}^{j}</td><td>$\mu^{c_{13}}$</td><td>β_{13}^{j}</td><td>$\mu^{c_{21}}$</td><td>β_{21}^{j}</td><td>$\mu^{c_{22}}$</td><td>β_{22}^{j}</td><td>(β,σ)</td></tr>
<tr><td>0.76
[0, 0.76]
[0.76, 1]
[0, 1]</td><td>[0, 0.40]
[0.40, 6.0]</td><td>0.15
0.15
0.15
0.15</td><td>0.85
5.15</td><td>[0,0.76]
0.76
[0, 1]
[0.76, 1]</td><td>[5.61, 6.0]
[0, 5.61]</td><td>[0, 0.30]
[0, 0.30]
[0, 0.30]
[0, 0.30]</td><td>0.90</td><td>[0.76, 1]
[0.76, 1]
0.76
0.76</td><td>[2.55,3.45]</td><td>d_1,
(0.29, 0.21)</td></tr>
<tr><td>0.51
[0, 0.51]
[0.51, 1]
[0, 1]</td><td>[0, 0.72]
[0.72, 6.0]</td><td>[0, 0.11]
[0, 0.11]
[0, 0.11]
[0, 0.11]</td><td>[0, 0.40]
[5.60,6.0]</td><td>[0,0.51]
0.51
[0, 1]
[0.51, 1]</td><td>[5.31, 6.0]
[0, 5.31]</td><td>0.45
0.45
0.45
0.45</td><td>0.65</td><td>[0.51, 1]
[0.51, 1]
0.51
0.51</td><td>[2.20,3.80]</td><td>d_{21},
(0.53, 0.25)</td></tr>
<tr><td>0.38
[0, 0.38]
[0.38, 1]
[0, 1]</td><td>[0, 0.90]</td><td>[0, 0.11]
[0, 0.11]
[0, 0.11]
[0, 0.11]</td><td></td><td>[0, 0.38]
0.38
[0, 1]
[0.38, 1]</td><td>[5.10, 6.0]</td><td>[0.38, 1]
[0.38, 1]
0.38
0.38</td><td>[0, 0.76]</td><td>[0, 0.29]
[0, 0.29]
[0, 0.29]
[0, 0.29]</td><td></td><td>d_{22},
(0.68, 0.05)</td></tr>
</table>

Таблиця 4 – Лінгвістична інтерпретація розв’язків

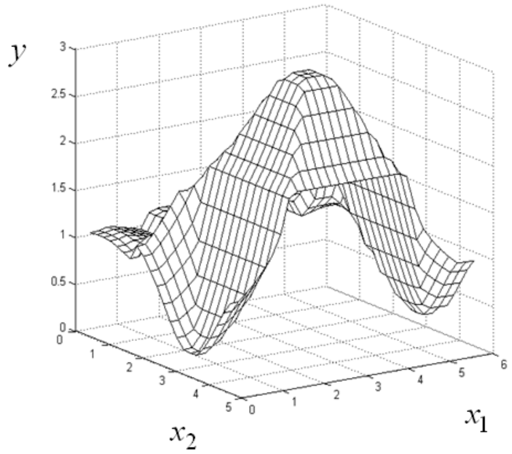
<table>
<tr><td colspan="4">ЯКЩО входи</td><td colspan="2">ТО вихід</td></tr>
<tr><td colspan="2">Генетичний алгоритм (ГА)</td><td colspan="2">Нейронна мережа (НМ)</td><td>ГА</td><td>НМ</td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td colspan="2">y</td></tr>
<tr><td>*нС – вС*
Н або *В*</td><td>*нС*
вС</td><td>*вН – нВ*
вН або *нВ*</td><td>*нС*
С – В</td><td>d_1</td><td>d_1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">*нС – вС*
Н або *В*</td><td rowspan="2">*Н*
нС або *В*</td><td>*нС – вС*
Н або *В*</td><td>*Н*
С – В</td><td rowspan="2">d_2</td><td>d_{21}</td></tr>
<tr><td>*вН* або *нВ*
Н або *В*</td><td>*Н*
нС</td><td>d_{22}</td></tr>
<tr><td>*Н* або *В*
нС або *вС*</td><td>*Н*
В</td><td>*Н* або *В*
нС або *вС*</td><td>*Н*
С або *В*</td><td>d_3</td><td>d_3</td></tr>
<tr><td>*нС* або *вС*
С</td><td>*вС*
В</td><td>*нС* або *вС*
С</td><td>*вС*
С або *В*</td><td>d_4</td><td>d_4</td></tr>
<tr><td>*С*</td><td>*вС*</td><td>*С*</td><td>*вС*</td><td>d_5</td><td>d_5</td></tr>
</table>

Таблиця 5 – Параметри функцій належності нечітких термів і ваги правил після генетичної настройки

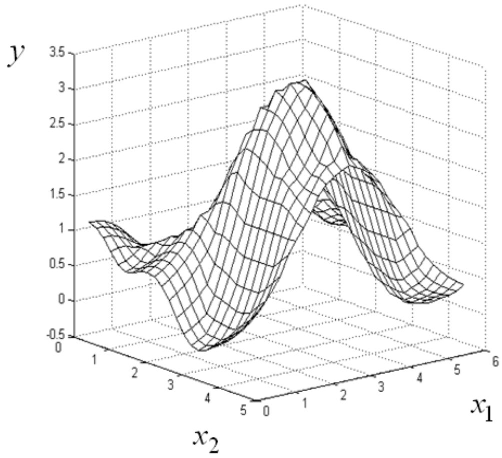
<table>
<tr><td rowspan="2">x_2</td><td colspan="5">x_1</td></tr>
<tr><td>*Н*, (0.30, 0.81)</td><td>*нС*, (2.43, 0.50)</td><td>*С*, (3.00, 0.62)</td><td>*вС*, (3.64, 0.55)</td><td>*В*, (5.70, 0.86)</td></tr>
<tr><td>*В*, (3.60, 0.49)</td><td>d_2 (0.87)</td><td>d_3 (0.90)</td><td>d_4 (0.96)</td><td>d_3 (0.90)</td><td>d_2 (0.87)</td></tr>
<tr><td>*вС*, (3.05, 0.62)</td><td>d_1 (0.84)</td><td>d_4 (0.96)</td><td>d_5 (1.00)</td><td>d_4 (0.96)</td><td>d_1 (0.84)</td></tr>
<tr><td>*нС*, (0.88, 0.54)</td><td>d_2 (0.87)</td><td colspan="3">d_1 (0.89)</td><td>d_2 (0.87)</td></tr>
<tr><td>*Н*, (0.30, 0.78)</td><td>d_3 (0.95)</td><td colspan="3">d_2 (0.90)</td><td>d_3 (0.95)</td></tr>
</table>

Таблиця 6 – Параметри функцій належності нечітких термів і ваги правил після нейронної настройки

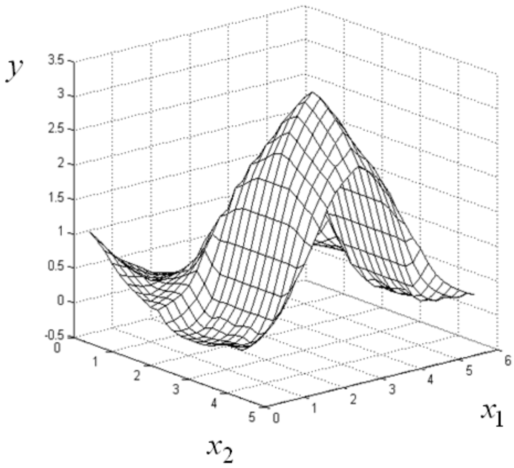
<table>
<tr><th rowspan="2">x_2</th><th colspan="7">x_1</th></tr>
<tr><th>*Н*,
(0.30, 0.72)</th><th>*вН*,
(0.91, 0.80)</th><th>*нС*,
(2.41, 0.48)</th><th>*С*,
(3.00, 0.61)</th><th>*вС*,
(3.60, 0.52)</th><th>*нВ*,
(5.11, 0.84)</th><th>*В*,
(5.70, 0.71)</th></tr>
<tr><td>*В*, (3.60, 0.53)</td><td rowspan="3">d_{21} (0.85)</td><td rowspan="3">d_1 (0.86)</td><td>d_3 (0.93)</td><td>d_4 (0.96)</td><td>d_3 (0.93)</td><td rowspan="3">d_1 (0.86)</td><td rowspan="3">d_{21} (0.85)</td></tr>
<tr><td>*вС*, (3.02, 0.61)</td><td>d_4 (0.96)</td><td>d_5 (1.00)</td><td>d_4 (0.96)</td></tr>
<tr><td>*С*, (2.41, 0.54)</td><td>d_3 (0.93)</td><td>d_4 (0.96)</td><td>d_3 (0.93)</td></tr>
<tr><td>*нС*, (0.91, 0.83)</td><td>d_{22} (0.92)</td><td colspan="5">d_1 (0.88)</td><td>d_{22} (0.92)</td></tr>
<tr><td>*Н*, (0.30, 0.71)</td><td>d_3 (0.96)</td><td>d_{22} (0.92)</td><td colspan="3">d_{21} (0.86)</td><td>d_{22} (0.92)</td><td>d_3 (0.96)</td></tr>
</table>



а)



б)



в)

Рисунок 3 – Апроксимація нечіткими відношеннями (а); правилами для $m = 5$ (б); правилами для $m = 6$ (в)

Висновки

Запропоновано нейро-мережевий підхід, який дозволяє генерувати правила ЯКЩО-ТО шляхом розв'язання рівнянь нечітких відношень для заданих класів виходу, що є альтернативою селекції і налаштуванню структури гіпербоксів. При цьому кількість правил в класі дорівнює кількості розв'язків, а геометрія термів у правилі визначається інтервалами значень вхідних змінних.

Запропонований підхід забезпечує адаптацію структури правил до змінення границь класів виходу для заданої системи нечітких відношень. Структура початкового набору правил визначається за допомогою генетичного алгоритму. Поетапне розв'язання задач оптимізації здійснюється за допомогою рекурентних співвідношень, які відповідають навчанню *min-max* нейро-нечіткої мережі, ізоморфної лінгвістичним розв'язкам системи рівнянь нечітких відношень.

Список літератури

1. Gabrys B. General fuzzy min-max neural network for clustering and classification / Gabrys B., Bargiela A. // IEEE Transactions on Neural Networks. – 2000 – Vol. 11 (3). – pp. 769 – 783. – ISSN: 1045-9227.

2. Fu X.J. Linguistic rule extraction from a simplified RBF neural network / Fu X.J., Wang L.P. // Computational Statistics. – 2001. – Vol. 16(3). – pp. 361 – 372. – ISSN: 0943-4062.

3. A new approach to division of attribute space for SVR based classification rule extraction / Zhang D., Duan A., Fan Y. et al. // Advances in Neural Networks. – 2008. – Vol. 5263. – pp. 691 – 700. – ISBN 978-3-540-87731-8.

4. Yager R. Essentials of fuzzy modeling and control / Yager R., Filev D. – New York: John Willey & Sons, 1994. – 408 p. – ISBN 0-471-01761-2.

5. Peeva K. Fuzzy relational calculus. Theory, applications and software / Peeva K., Kyosev Y. – New York: World Scientific, 2004. – 304 p. – ISBN: 978-981-256-076-6.

6.Rotshtein A. Fuzzy evidence in identification, forecasting and diagnosis / A. Rotshtein, H. Rakytyanska. – Heidelberg: Springer, 2012. – 314 p. – ISBN 978-3-642-25785-8.

7. Ракитянська Г.Б. Ідентифікація нелінійних залежностей нечіткими правилами і відношеннями / Ракитянська Г.Б. // Контроль і управління в складних системах КУСС – 2012: XI Міжн. наук. конф., 9 – 11 жовтня 2012 р.: тези доп. – Вінниця: ВНТУ, 2012. – С. 255. – ISBN 966-641-187-3.

8. Rotshtein A. Expert rules refinement by solving fuzzy relational equations / Rotshtein A., Rakytyanska H. // Human System Interaction HSI – 2013: VI IEEE Conference, 6 – 8 June, 2013: Proceedings. – Sopot, Poland, 2013. – pp. 257 – 264. – ISBN 978-1-4673-5636-7.

9. Ротштейн А.П. Адаптивная система диагностики на основе нечетких отношений / Ротштейн А.П., Ракитянская А.Б. // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 4. – С.135 – 150. – ISSN 0023-1274.

10. Rotshtein A. Fuzzy logic and the least squares method in diagnosis problem solving / Rotshtein A., Rakytyanska H. // In: Sarma R.D. (ed) Genetic diagnoses. – New York: Nova Science Publishers, 2011. – pp. 53 – 97. – ISBN 978-1-61324-866-9.

Відомості про авторів

Ракитянська Ганна Борисівна – к.т.н., доцент, докторант кафедри програмного забезпечення, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.